

有限体積法による圧縮性流れの数値計算法

名古屋大学大学院工学研究科
航空宇宙工学専攻
流体力学講座

1999年10月1日

序言

数値流体力学 (Computational Fluid Dynamics, CFD) とは、計算機を利用して流体力学の支配方程式を数値的に解き、様々な流体力学の問題に対する答えを出すものである。CFD は、この 30 年間に飛躍的に進歩した。1960 年代に芽生え、70 年代に発展した。1960 年代に現れた MAC (Marker and Cell) 法は非圧縮性流において、また、1969 年の MacCormack の方法は圧縮性流においてそれぞれ先鞭をつけた。さらに、1970 年代半ばに出てきた陰解法の Beam-Warming 法は一世を風靡し、世界の多くの人達がこの方法を使用した。渦度をつまんだせん断層のひとつである境界層をよりよく捕らえるため、壁付近に多くの格子が必要となる。そのため、陽解法では CFL 条件のため時間刻みに制限が出てくる。陰解法を使うことによりこの条件が緩和され、より短い時間で計算が可能となる。

近年のコンピュータの発展も CFD の発展に拍車を掛けた。特に 1980 年代初頭に現れたスーパーコンピュータ (通称スパコン) の果たした役割は大きい。これには日本のコンピュータメーカーも大いに貢献している。最近ではパソコンも速くなり、かなりの流体計算がパソコンで手軽にできるようになった。

最近では CFD は産業界にも普及し、物作りに貢献している。特に、設計開発期間をいかに縮小するかがコスト削減の鍵を握るため、実際に物を作って実験する前に、シミュレーションを多用するようになった。航空宇宙産業では積極的に CFD を利用している。

世の中は確かに進歩するものである。昔は、流体力学は実験か理論でないと評価されなかった時代であった。理論はその長所は多いが、扱える範囲に限りがある。物を作るうえでは我々はどうしても、個々の実際の流れを知りたい。CFD が出始めた頃は、数値解析は低く評価された。理由は一般性がないとのことである。しかし、今ではほとんどの人が計算機を利用して研究している。この点においては米国は進んでいて、考え方が合理的である。これは良い教訓で、若い人達も今扱っているもの、あるいは、確立しているものに満足せず、常に新しいことにチャレンジすべきである。

さて、ここでは、名古屋大学工学研究科航空宇宙工学専攻流体力学研究室が 1980 年代前半より行ってきた数値流体力学の研究成果をまとめて、少しでも次代を担う若い人達の勉強に役立てることを狙いとして、テキストの作成を企画した。今までの流体力学講座の卒業生が、限りのある計算機ハードウェア環境の中で、すばらしい計算および計算コードを数多く残してくれた。ここでは、第 1 段として圧縮性流を解く有限体積法についてまとめたが、続けて、非圧縮性流体の計算法も出すべく準備をしている。この圧縮性流体計算法では、ロシアのケルデイッシュュ応用数学研究所より本学に来られ、現在、流体力学講座の講師をつとめるメンショフ・イゴール博士に負うところが大きい。博士の深い数学の基礎力に基づく数値計算法の開発には敬意を表するものである。世の中に流体計算ソフトが数多くあるが、それらのソフトも永遠ではなく、必ず新しいソフトに置き代わっていくであろう。それについていくためにも、このテキストでしっかりと CFD の基礎を勉強してもらいたい。基礎はいつまでも残る。

名古屋大学工学研究科航空宇宙工学専攻
流体力学研究室 教授 中村佳朗
1999 年 10 月 1 日

目次

第 1 章 序章

第 2 章 流体中における弱不連続および強不連続

第 3 章 微分方程式の離散化

第 4 章 中心数値流束および風上数値流束の概念

第 5 章 正負によってなされる風上化の基本概念

第 6 章 流束ベクトル分離法 (FVS) に基づいた 1 次精度の陽的風上スキーム

第 7 章 Godunov 型スキームの基本概念

第1章 序章

ここでは数値流体力学 (Computational Fluid Dynamics) で使用される重要な数値解析手法について紹介する。最近、CFD は実験、理論に次ぐ学問としてその地位を確立した。そこでは、コンピュータを使って流れのシミュレーションすることにより、流体力学に関連した様々な問題が解析される。その意味では数値流体力学は実験流体力学に似ている。つまり、コンピュータが実験装置の役割を果たす。近年ではコンピュータが急速に進歩し、さらに、それに合わせて計算手法 (アルゴリズム) も進歩したため、その結果は十分な精度を持ち、かつ実際において有用な結果を与えてくれるようになった。その意味で数値流体力学は数値実験とも呼ばれる。

数値流体力学の基本的な考え方は理論流体力学で使用されている連続関数による流体の記述を離散的なものに置き換えることである。すなわち、流体の方程式を離散的な方程式で記述する。理論流体力学と違って、数値流体力学における流体の状態は離散関数で表される。それらの離散関数は空間および時間に関して、有限個の点の集合において定義される。これらの離散関数は適当な離散方程式あるいは代数方程式によって支配され、それらは考えている現象を十分記述できるように選ばれた物理モデルから誘導される。

以上の事から、数値流体力学の問題は以下の3つが主要部をなす。

- 実際的な物理モデルを選択する。
- 一組の離散方程式を導く。
- これらの方程式を効率的に解く。

これらを図式的に表すと、

物理モデル ⇒ 離散方程式 ⇒ 数値解

である。この2番目の部分は数値的方法により解くことが出来る。それは数学的な特別な方法で、物理モデルの微分方程式や積分方程式に基づいた離散方程式を与える。このテキストでは主にこの部分を扱う。ここではいくつかの重要な数値的方法とその特徴について概観する。特に非粘性の圧縮性流体モデルについて述べる。また、このテキストでは基礎となる物理モデルとして連立オイラー方程式を選ぶ。その理由は

- ほとんどの流体の運動はこのモデルで十分記述される。
- 歴史的にみて、オイラー方程式は離散化という概念において研究された最初の方程式の一つである。そして、現在オイラー方程式に対する数値的方法は、十分厳密な数学理論の裏づけがある。

- オイラー方程式に対して開発されたほとんどの方法は、粘性のある実際的な物理モデルに対しても有効である。ナビエーストックス方程式では、特別に離散化されたせん断層の項や熱伝導項を付加すればよい。

1.1 基本概念と定義

流体の運動を定義するのに3種類の数学的量がある。それらはスカラー量、ベクトル量、2階のテンソル量である。ここではスカラー量を小文字で、ベクトル量を太字の小文字で、また、テンソル量を大文字で表す。例えば、 a はスカラー量を、 a はベクトル量を、そして A はテンソル量を表す。これらの値は3次元空間座標 (x_1, x_2, x_3) 、および時間 t の関数である。それらは3次元空間で、非定常のスカラー場、ベクトル場、およびテンソル場を構築する。ベクトルは3つのデカルト座標成分 $a = a_i (i = 1, 2, 3)$ で表される。一方、テンソルは9個の成分 $A = a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ で表される。もし、 $a_{ij} = a_{ji}$ であれば、テンソル A を対称テンソルと呼ぶ。ベクトルとテンソルの間には以下のような代数演算が定義される。

- スカラーとベクトル積あるいはスカラーとテンソル積： $ba = c = (ba_i)$, $bA = C = (ba_{ij})$
- ベクトルとベクトルのスカラー積： $a \cdot b = c = a_i b_i$
- ベクトルとベクトルのテンソル積： $a \otimes b = C = (a_i b_j)$
- ベクトルとベクトルのベクトル積： $a \times b = c = (\varepsilon_{ijk} a_j b_k)$
- ベクトルとテンソルのスカラー積： $a \cdot B = c = (a_i b_{ji})$
- テンソルとベクトルのスカラー積： $B \cdot a = c = (b_{ji} a_j)$

ここおよびこれ以降では、Einsteinの総和則が使用される。つまり、式の中に同じ添字が、たとえば i が2つ現れたときには、 i は、 $i = 1, 2, 3$ のように変化させて、加算する。例えば $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ となる。また、 ε_{ijk} は添字 i, j, k が順置換のとき1、逆置換のときには-1、その他のときには0となる。例えば順置換とは ijk が123, 231, 312のときである。上記項目の5番目および6番目の演算はテンソルが対称テンソルのときだけ可換である。つまり、 $a_i b_{ij} = b_{ji} a_j$ である。

今、あるスカラー量、ベクトル量、テンソル量が、対応する3次元空間における時間依存の微分可能な場を表すものとする、以下の微分演算子が導入される。

- スカラー a の勾配： $grad a = t = (\partial_i a)$ ベクトル量
- ベクトル a の勾配： $grad a = A = (\partial_i a_j)$ テンソル量
- ベクトル a の発散： $div a = d = (\partial_i a_i)$ スカラー量
- テンソル A の発散： $div A = a = (\partial_i a_{ij})$ ベクトル量
- ベクトル a の渦度： $curl a = (\varepsilon_{ijk} \partial_j a_k)$ ベクトル量

ここで、 ∂_i は空間座標 i に関する偏微分を表す。

微分演算子ベクトル $\nabla = (\partial_i)$ を導入すると、これらの演算は通常のベクトル形式における代数演算で表される。

$$\begin{aligned} \text{grad } a &= \nabla a, & \text{grad } a &= \nabla \otimes a, & \text{div } a &= \nabla \cdot a \\ \text{div } A &= \nabla \cdot A, & \text{curl } a &= \nabla \times a \end{aligned}$$

問題 1 次の恒等式が成り立つことを示しなさい。

$$\begin{aligned} \nabla(ab) &= a\nabla b + b\nabla a \\ \nabla \cdot ab &= a\nabla \cdot b + b \cdot \nabla a \\ \nabla \times ab &= a\nabla \times b + \nabla a \times b \\ \nabla \times \nabla a &= 0 : \text{curl grad } a = 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times a) &= 0 : \text{div curl } a = 0 \end{aligned}$$

1.2 Gauss の発散定理

S を 3 次元空間内で閉じた領域の表面であるとする。その面に垂直に外向き法線ベクトルを n とし、その体積を V とする。その時、発散定理は

- $a(x_i, t)$ がスカラー場のとき

$$\int_S n a dS = \int_V \nabla a dV \quad (1.1)$$

- $a(x_i, t)$ がベクトル場のとき

$$\int_S n \cdot a dS = \int_V \nabla a dV \quad (1.2)$$

- $A(x_i, t)$ がテンソル場のとき

$$\int_S n \cdot A dS = \int_V \nabla \cdot A dV \quad (1.3)$$

系 体積 V を点にまで縮小すると、式 (1.1) (1.2) は近似的に勾配 (grad) 及び発散 (div) に対する近似式となる。

$$\nabla a \equiv \frac{1}{\Delta V} \int_S n a dS \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot a \equiv \frac{1}{\Delta V} \int_S n \cdot a dS \quad (1.5)$$

1.3 基礎方程式

流体力学に対する支配方程式を誘導するときの基礎となる概念は保存法則、もっと具体的にいうと、質量、運動量、エネルギーに関する 3 つの保存式である。それらは公理として正しいと考えて良い。保存則によれば、ある与えられた体積 V の中の流れの保存量の変化は、その中から湧きだす量

と境界 S を横切って流入あるいは流出する量に依存する。後者の量を 流束と呼ぶ。流束は2つの寄与からなっている。一つは対流項に関するもので、流体の速度による、対流輸送である。もう一つは、拡散による寄与で、分子の運動に起因する。後者は流体が流れていないときにも現われる。流束は密度やエネルギーのようなスカラー量に対してはベクトルであり、運動量のようなベクトル量に対しては2階のテンソルである。これらに対応するソース項はそれぞれスカラー量およびベクトル量である。一般的に、保存法則は以下のように書ける。

- スカラー量 u に対して

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = - \int_S f \cdot ndS + \int_V q dV \quad (1.6)$$

- ベクトル量 u に対して

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = - \int_S F \cdot ndS + \int_V q dV \quad (1.7)$$

ここで、 f および q はスカラー量に対する流束ベクトルおよびソース量、また、 F および q はベクトル量に対する流束テンソルおよびソースベクトルである。

式(1.6)や式(1.7)は、保存法則に対する積分形と呼ばれる。この式に対して Stokes の定理を使い、かつ、体積をゼロにもっていくと、以下のような保存則に対する微分形の方程式が得られる。

- スカラー量 u に対して

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f = q \quad (1.8)$$

- ベクトル量 u に対して

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot F = q \quad (1.9)$$

問題2 保存則における微分方程式を誘導せよ。

$V = (V_i), i = 1, 2, 3$ を流体の速度ベクトルとする。対流項を具体的に書くと、流束は以下のようになる。

- スカラー量 u に対して

$$f = uV + f_d \quad (1.10)$$

- ベクトル量 u に対して

$$F = u \otimes V + F_d \quad (1.11)$$

ここで、添字 d は流束における拡散項の寄与を表す。流体力学における物理モデルの選択は、主にこの流束における拡散項を具体的に与えることである。

流体力学で考えられる2つの基礎的なモデルはオイラー方程式とナビエストークス方程式である。 ρ を密度、 e を単位質量当たりの内部エネルギーとする。そのとき1成分流体に対する保存量は以下ようになる。

- 密度 ρ : スカラー量
- 運動量 ρV : ベクトル量
- 全エネルギー $\rho(e + 0.5V^2)$: スカラー量

オイラー方程式 (Euler) およびナビエストークス方程式 (NS) に対する拡散流束は以下のように書ける。

- 密度 ρ に対して : $f_d = 0(\text{Euler})$, $f_d = 0(\text{NS})$
- 運動量 ρV に対して : $F_d = pI(\text{Euler})$, $F_d = pI - T(\text{NS})$
- 全エネルギー $\rho(e + 0.5V^2)$ に対して : $f_d = pV(\text{Euler})$, $f_d = pV - V \cdot T + Q_h(\text{NS})$

ここで、 p は圧力、 I は 2 階の単位テンソル、また、 T は粘性応力テンソルで、以下のように定義される。

$$T = 2\mu S - (2/3)\mu(\nabla \cdot V)I \quad (1.12)$$

さらに、 Q_h は熱流束で、以下のように定義される。

$$Q_h = -k\nabla T \quad (1.13)$$

ここで、 μ は粘性係数、 k は熱伝導係数、 T は温度、また、 $S = (S_{ij})$ は速度歪みテンソル (対称テンソル) で、以下のように定義される。

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.14)$$

ここでの保存則の連立方程式を閉じるためには、熱力学に関する 2 つの関係式を考慮する必要がある。それらは

$$e = e(p, \rho), \quad T = T(p, \rho) \quad (1.15)$$

である。最も簡単な熱力学に関するモデルは完全ガスの方程式である。

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad e = c_v T \quad (1.16)$$

ここで、 γ は比熱比 ($\gamma = C_p/C_v$)、 c_p は等圧比熱、 c_v は等容比熱である。

問題 3 オイラーの方程式およびナビエストークス方程式に対する保存形の方程式を導出せよ。

1.4 簡単化されたモデルおよびモデル方程式

一般的に流体の方程式は空間 3 次元と時間の関数として表される。その中で、特別な場合として、いくつかの簡単化されたモデルが考えられる。それらは、

- 定常流 :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (1.17)$$

- 1 次元流 :

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (1.18)$$

- 2 次元流 :

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (1.19)$$

ここでは離散化について勉強するという観点から、数学的基礎として非定常1次元連立オイラー方程式を主に取り上げる。この式に対する空間座標は x_1 である。この式に対する保存パラメータあるいは解ベクトル u の成分は

$$u = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, e_t)^t \quad (1.20)$$

である。ここで、 t は転置を表す。また、 e_t は単位体積当りの全エネルギーを表し、以下のように定義される。

$$e_t = \rho(e + 0.5u \cdot u) \quad (1.21)$$

一方、流束ベクトル f の成分は

$$f = (\rho v_1, \rho v_1^2 + p, \rho v_1 v_2, \rho v_1 v_3, H_t)^t \quad (1.22)$$

ここで、 H_t は全エンタルピーで以下のように定義される。

$$H_t = \rho(h + 0.5u \cdot u) = e_t + p \quad (1.23)$$

このようにして、一次元非定常オイラー方程式はベクトル表示で以下のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (1.24)$$

この式は1次の準線形連立偏微分方程式である。つまり、解ベクトルの微分に関して線形で、解ベクトルそのものに対しては非線形である。

式(1.24)と平行して、同様な基本的数学的性質を維持し、より簡単なモデル式を考えることは役に立つ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f = f(u) \quad (1.25)$$

ここで、 f は2回微分可能な関数である。この方程式にはオイラー方程式が持つ2つの基本的な特性：波動性と非線形性が存在する。

- 線形波動方程式：

$$f(u) = au, \quad a = \text{const} \quad (1.26)$$

- 非粘性バーガース (Burgers) 方程式：

$$f(u) = 0.5u^2 \quad (1.27)$$

線形波動方程式は x 方向に速度 a で伝播する波を表す。 a が正であれば x の正の方向に、 a が負であれば x の負の方向に伝播する。これは、言い換えれば、一定の速度による対流輸送とも考えられる。この一般解は

$$u = F(x - at) \quad (1.28)$$

で、このとき F は任意関数である。

問題4 次の初期条件を持つ波動方程式の解を求めよ。

$$u = (0, x) = u_1 \text{ for } x < 0; \quad u = (0, x) = u_2 \text{ for } x > 0 \quad (1.29)$$

ここで、 u_1, u_2 は一定値である。

非粘性のバーガス方程式は以下の一般解をもっている。

$$du = 0 \text{ along } \frac{dx}{dt} = u \quad (1.30)$$

初期において $u = (0, x) = g(x)$ の分布を持つ場合の一般解は

$$u = (x, t) = g(x - g(x_0)t); \quad x = x_0 + g(x_0)t \quad (1.31)$$

となる。

問題5 問題4で与えられた初期条件に対して、非粘性バーガス方程式を解きなさい。このとき、 $u_1 > u_2$ と $u_1 < u_2$ の2つの場合を考えなさい。

第2章 流体中における弱不連続と強不連続

ここでは連立圧縮性オイラー方程式のいくつかの特性について述べる。それらはこの方程式を離散化するとき考慮されるべき大事な特性である。一般性を失なわないで、1次元の完全ガスの流れをモデル式として選ぶことができる。その式をまとめると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.1)$$

ここで、

$$u = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, e_t)^t \quad (2.2)$$

$$f = (\rho v_1, \rho v_1^2 + p, \rho v_1 v_2, \rho v_1 v_3, H_t)^t \quad (2.3)$$

$$e_t = \rho(e + 0.5u \cdot u) \quad (2.4)$$

$$H_t = e_t + p \quad (2.5)$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (2.6)$$

方程式 (2.1) は連続の解と不連続の解の両方を解として持つことができる。また、不連続の解として、2種類の解が存在する。つまり、一つは弱不連続で、もう一つは強不連続である。

定義 1 以下の条件を満たすとき、関数 $u = u(x, t)$ は (x, t) 面内にある $x_d = x_d(t)$ の曲線に沿って弱不連続を持つ。

$$u(x_d + 0, t) = u(x_d - 0, t) \quad \text{and} \quad \frac{\partial u(x_d + 0, t)}{\partial x} \neq \frac{\partial u(x_d - 0, t)}{\partial x} \quad (2.7)$$

一方、強不連続は以下の条件を満たす。

$$u(x_d + 0, t) \neq u(x_d - 0, t) \quad \text{and} \quad \frac{\partial u(x_d + 0, t)}{\partial x} \neq \frac{\partial u(x_d - 0, t)}{\partial x} \quad (2.8)$$

2.1 弱不連続の特性

u を方程式 (2.1) の解であるとする。我々は各時刻における、曲線 $x_c = x_c(t)$ での u の値 $u_c(t) = u(x_c(t), t)$ を知りたい。どのような条件であれば、この曲線の近傍での解がこの曲線上の解から決定されるか。答えは、この曲線の空間微分の値が分かれば完全に決定されるである。それゆえ、これらの微分値を一意に決定（あるいは定義）しなければならない。

この解をこの曲線の存在する場所で、時間 t に関して微分すると、次の連立方程式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx_c}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_c}{dt} \quad (2.9)$$

方程式(2.1)を使ってこの方程式から時間微分を消去すると、空間微分に対する次の連立方程式が得られる。

$$\left(A - \frac{dx_c}{dt}I\right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_c}{dt} \quad (2.10)$$

ここで I は単位行列であり、 A はヤコビアン行列で以下のようなものである。

$$A = \frac{\partial f}{\partial u} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \partial f_i / \partial u_j \quad (2.11)$$

このことから、微分は以下の条件を満たすときだけ一意に定義される。

$$\det(A - \lambda_c I) \neq 0, \quad \lambda_c = dx_c/dt \quad (2.12)$$

この場合には微分はこの曲線のところで連続となる。ここで、 $\det()$ は行列式のことである。

これとは反対に、

$$\det(A - \lambda_c I) = 0 \quad (2.13)$$

のときには、微分値は一意には決まらなく、その結果、この曲線 $x_c = x_c(t)$ は弱不連続と呼ばれる。これは次の定理として表される。

2.2 弱不連続に関する定理

u を方程式(2.1)の解で、 $x_c = x_c(t)$ を (x, t) 平面での曲線とする。この曲線が解 u の弱不連続を表すならば、速度 $\lambda_c = dx_c/dt$ はヤコビアン行列 A の固有値でなければならない。換言すれば、方程式(2.1)に対するどんな弱不連続もヤコビアン行列の固有値に等しい速度で伝播する。

注意： この弱不連続は特性曲線 (Characteristics) とも呼ばれる。

系： 連立方程式(2.1)の解はそのヤコビアン行列が少なくとも一つの実数の固有値を持っているときのみ弱不連続を持つ可能性がある。

2.3 強不連続の関係

強不連続を持つ連立方程式(2.1)の解は一般化された解、あるいは弱解とみなされる。つまり、それらは連立微分方程式から得られるある連立積分方程式の解でなければならない。これらの積分方程式から、不連続の両側における流れの各量の間のある関係が導かれる。ここで、強い不連続 $x_s = x_s(t)$ を挟む微小な区間 $(x_s - h, x_s + h)$ での積分を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_s-h}^{x_s+h} u dx - \frac{dx_s}{dt} [u]_{x_s-h}^{x_s+h} + [f]_{x_s-h}^{x_s+h} = 0 \quad (2.14)$$

この式において h を 0 にもっていくと、強い不連続の関係式は以下ようになる。

$$[f] - \lambda_s [u] = 0 \quad (2.15)$$

ここで、 $\lambda_s = dx_s/dt$ で、これは不連続の速度を表す。また、 $[a] = a_+ - a_-$ で、不連続を横切ったの諸量の跳びを表す。ただし、 $a_+ = a(x_s + 0)$, $a_- = a(x_s - 0)$ である。

関係式 (2.15) は Rankine-Hugoniot の関係式として知られている。これを書き下すと、以下のようになる。

$$[\rho v_1] = \lambda_s [\rho], [\rho v_1^2 + p] = \lambda_s [\rho v_1], [\rho v_1 v_2] = \lambda_s [\rho v_2] \quad (2.16)$$

$$[\rho v_1 v_3] = \lambda_s [\rho v_3], [e_t] = \lambda_s [H_t] \quad (2.17)$$

これらの関係式から 2 種類の不連続が存在することが分かる。それらは接触面と衝撃波である。

接触面ではそれを横切った質量流量が存在しない。また、圧力もそれを横切って変化しない。つまり、

$$v_1 = v_2 = \lambda_s \quad (2.18)$$

$$p_1 = p_2 \quad (2.19)$$

である。

一方、衝撃波の場合には以下の 2 つの不連続が存在する。

$$1) \rho_1 > \rho_2, p_1 > p_2, v_1 < v_2$$

$$2) \rho_1 < \rho_2, p_1 < p_2, v_1 > v_2$$

問題 6 衝撃波の場合に Rankine-Hugoniot の関係式が 2 つの解を持つことを示しなさい。

最初の場合は膨張衝撃波として知られており、衝撃波を横切ってエントロピが減る。これは、熱力学の第 2 法則に反するため、この場合は実際には実現しない。

2.4 多次元方程式への拡張

上で述べられた関係は容易に 3 次元の場合に拡張される。そのためには 3 次元空間における移動するスムーズな表面を考える。その表面の方程式は次の式で書かれる。

$$\phi_d(x, t) = 0 \quad (2.20)$$

ここで、 $x = (x_1, x_2, x_3)$ は空間の位置ベクトル、また、 $\phi_d \in C^1(R^3 \times R^1)$ である。その表面の速度 λ_d は通常、次式により垂直速度として定義される。

$$\lambda_d n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} \quad (2.21)$$

ここで、 x_1, x_2 は以下の式を満たす。

$$\phi_d(x_1, t) = 0, \phi_d(x_2, t) = 0 \quad (2.22)$$

ここで、 n は点 x_1 で表面に垂直で、点 x_1, x_2 は法線 n の上にある。

問題 7 式 (2.22) で定義された方程式および垂直速度は次の式と連動していることを証明しなさい。

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial t} + \lambda_d |\text{grad } \phi_d| = 0 \quad (2.23)$$

ここで、3次元オイラー方程式を考えよう。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \cdot F) = 0 \quad (2.24)$$

ここで、 F はオイラーの流束テンソルである。また、 $\phi_d(x, t) = 0$ は先に定義された意味での、弱あるいは強不連続を表す面である。3次元オイラー方程式を不連続面とカップルした局所直交基底 n, k, l の座標に関して考えてみる。ここで、 n は面に垂直な単位ベクトルで、 k, l は面に接する単位ベクトルである。1次元の場合と同じ手法を適用すると、以下のように多次元の場合への一般化が得られる。

1) もし $\phi_c(x, t) = 0$ が弱い不連続面を、また、 λ_c がその不連続面の速度を表すとすれば、 λ_c は次のヤコビアン行列の固有値でなければならない。

$$A_n = \frac{\partial f_n}{\partial u_n}, \quad f_n = f_n(u_n) \quad (2.25)$$

ここで、保存量 u_n とその流束ベクトル f_n は以下の式により定義される。

$$u_n = (\rho, \rho v_n, \rho v_k, \rho v_l, e_t)^t \quad (2.26)$$

$$f_n = (\rho v_l, \rho v_n^2 + p, \rho v_n v_k, \rho v_n v_l, H_t)^t \quad (2.27)$$

ここで、 (v_n, v_k, v_l) は、前述した不連続面に関する局所基底座標での各速度成分である。

弱不連続面は3次元の場合には特性曲面と呼ばれる。それゆえ、方程式(2.23)は3次元オイラー方程式に対する特性曲線面に対する方程式となる。ここで、 λ_n は行列 A_n の固有値である。

2) もし、 $\phi_s(x, t) = 0$ が弱不連続面を表し、 λ_s がその法線方向速度とするなら、不連続面の両側での流れの特性量の間関係式であるランキン・ユゴニオ (Rankine-Hugoniot) の関係式は以下のようになる。

$$[f_n] = \lambda_s u_n \quad (2.28)$$

あるいは、成分表示であれば、

$$[\rho v_n] = \lambda_s [\rho], \quad [\rho v_n^2 + p] = \lambda_s [\rho v_n], \quad [\rho v_n v_k] = \lambda_s [\rho v_k], \quad (2.29)$$

$$[\rho v_n v_l] = \lambda_s [\rho v_l], \quad [e_t] = \lambda_s [H_t] \quad (2.30)$$

ここで、 f_n , u_n は式(2.27) (2.26) で定義されている。

2.5 ヤコビアン行列

流束 f を解ベクトル u の関数と考えると、次の行列 A が計算できる。

$$A = \frac{\partial f}{\partial u} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \quad (2.31)$$

これを使うと、流体の方程式(2.1)は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.32)$$

となる。この方程式の形は準線形方程式と呼ばれ、行列 A はヤコビアン行列である。

定義 2 もし、関数 $z = z(x)$ が

$$z(kx) = k^\alpha z(x), \quad \forall k, k \in \mathbb{R}^1 \quad (2.33)$$

を満たすならば、関数 z は次数 α の斉次関数である。

命題 (一様性) 保存量 u の関数として考えられた、式 (2.1) の中での流束 f は 1 次の斉次関数である。

系 1

$$f = Au \quad (2.34)$$

この性質を証明するには、

$$f(ku) = kf \quad (2.35)$$

とにおいて、これを k に関して微分し、その後で $k = 1$ とおく。

系 2

$$\frac{\partial Au}{\partial x} = A \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.36)$$

この系は、ヤコビアン行列は一定として微分演算子の外に出せることを意味している。

問題 8 系 1 および 2 を証明せよ。また、系 1 を直接確認せよ。

さらにここで、いくつかの形式的な定義が導入される。 $n \times n$ 行列の $A = (a_{ij})$ が与えられたとする。

定義 3 ベクトル表示で書かれた以下の連立線形代数方程式を考える。

$$Ax = \lambda x, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \quad (2.37)$$

このとき、式 (2.37) の $x = 0$ 以外の解に対する λ の値は行列 A の固有値と呼ばれる。そして、それに対応する解ベクトル x は、固有値 λ に対応する右固有ベクトルと呼ばれる。また、これらの固有値の組は A のスペクトルと呼ばれる。それらの最大値は A のスペクトル半径である。同様に、以下の連立方程式を考える。

$$yA = \lambda y, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (2.38)$$

$y = 0$ 以外の行ベクトル y は A の左固有ベクトルと呼ばれる。

これらの固有値は以下の特性方程式を解くことにより求められる。

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.39)$$

この方程式は n 次元の方程式で、その結果 n 個の固有値が存在する。右および左固有ベクトルは、固有値 λ を代入して、解 (2.37)、(2.38) から得られる。

命題 1 もし x が固有値 λ に対する固有ベクトルであるなら、 ax (a は任意) もまた固有値 λ に対する固有ベクトルである。もし、 x_1 および x_2 が固有値 λ に対する固有ベクトルであるなら、 $x = x_1 + x_2$ もまた固有値 λ に対する固有ベクトルである。

命題2 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を異なった固有値とすると、それらに対応する固有ベクトル x_1, \dots, x_n は線形的に独立である。

問題9 命題2を証明せよ。

これらの命題から右あるいは左固有ベクトルの組は次数 n より小さい次元の線型空間を構築することになる。さらに、ここで $n \times n$ 行列 A を考える。その固有値の空間は厳密に n に等しい次元を持っている。換言すれば、その行列は n 個の線形に独立した固有値を持っている。この場合には、行列は R^n に対して固有ベクトルの基底を持つことになる。

2.6 対角化

A を $n \times n$ の行列、 T を特異性のない $n \times n$ 行列 ($\det T \neq 0$) とする。その時、

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad (2.40)$$

は行列 A に相似であると言われる。

命題3 \tilde{A} が A に相似であるならば、 \tilde{A} は A と同じ固有値を持つ。もし、 x が A の固有ベクトルであるならば、 $\tilde{x} = T^{-1}x$ は同じ固有値に対応する \tilde{A} の固有ベクトルである。

問題10 命題3を証明せよ。

行列 A の対角化とは対角行列である相似行列への変換を意味する。

命題4 R^n に対する基底固有ベクトルを持つどんな行列も対角化される。

この命題を証明するには、行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対応する右固有ベクトルの基底 r_1, \dots, r_n を考えよう。ベクトル r_k の成分を r_{jk} とすると、次の行列を導入できる。

$$R = [r_1, \dots, r_n] = (r_{jk}) \quad (2.41)$$

この行列は右固有ベクトルの行列と呼ばれる（つまり、その列が右固有ベクトルに対応している）。これを使うと次の関係が得られる。

$$R^{-1}AR = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

これを変形すると、

$$AR = A[r_1, \dots, r_n] = R\Lambda \quad (2.43)$$

となる。それゆえ、 A に相似な対角行列は行列 A の固有値を持つ対角行列である。つまり、対角化は右固有ベクトルの行列を使用して実行される。

行列 A に対する基底右固有ベクトル r_1, \dots, r_n が決定されると、それに対応する特別な直交基底が存在する。それは、行ベクトル l_1, \dots, l_n である。それは以下の規則を満たす。

$$(l_i, r_j) = \delta_{ij} \quad (2.44)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカのデルタである。

問題 1 1 与えられた右固有ベクトルの基底に対して、それに対応する直交基底が唯一存在することを証明せよ。(ヒント：未知成分 l_1, \dots, l_n に関する連立線型方程式として、上で述べたルールを考えよ。)

l_{ki} をベクトル l_k の成分とすると、以下の行列 L が導入できる。

$$L = (l_1, \dots, l_n)^t = [l_{ki}] \quad (2.45)$$

ここで、

$$L = R^{-1} \quad (2.46)$$

は自明である。

命題 5 ベクトル l_1, \dots, l_n は固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対応する行列 A の線形独立な、左固有ベクトルである。ゆえに、それらは左固有ベクトルの基底をなす。

行列 L は左固有ベクトルの行列とみなすことが出来る。このようにして、左と右の固有ベクトル行列は直交性を有している。つまり、右固有ベクトルの逆行列は左固有ベクトルである。また、その逆も真である。今、 A を式 (2.32) のヤコビアン行列であるとし、 R と L を右および左固有値の行列とする。 A を対角化すると、式 (2.32) は以下のように変形できる。

$$R \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda R \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.47)$$

ここで、 Λ は A の固有値に対する対角行列である。この形の方程式から、別の変数、つまり特性変数 w が導入される。これは各変数の任意の変化 (例えば、 ∂_t あるいは ∂_x) に対しても、成り立つ関係である。

$$\delta w = R \delta u \quad (2.48)$$

特性変数に対して、式 (2.32) は以下のように書かれる。

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.49)$$

これは特性形として知られている。式 (2.49) を成分で書き下すと、

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial w_k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, \dots, 5 \quad (2.50)$$

これは適合関係式と呼ばれている。

以下に、式 (2.1) の非粘性流束 $f = f(u)$ に対するヤコビアン行列 A 、対角行列 Λ 、右および左固有ベクトルの行列 R 、 L が具体的に示されている。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha - v_1^2 & (2 - \bar{\gamma})v_1 & -\bar{\gamma}v_2 & -\bar{\gamma}v_3 & \bar{\gamma} \\ -v_1v_2 & v_2 & v_1 & 0 & 0 \\ -v_1v_3 & v_3 & 0 & v_1 & 0 \\ (\alpha - H_t)v_1 & -\bar{\gamma}v_1^2 + H_t & -\bar{\gamma}v_1v_2 & -\bar{\gamma}v_1v_3 & \bar{\gamma}v_1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_1 + a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 - a \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$R = \begin{bmatrix} a^2 - \alpha & \bar{\gamma}v_1 & \bar{\gamma}v_2 & \bar{\gamma}v_3 & -\bar{\gamma} \\ -v_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha - av_1 & a - \bar{\gamma}v_1 & -\bar{\gamma}v_2 & -\bar{\gamma}v_3 & \bar{\gamma} \\ \alpha + av_1 & -a - \bar{\gamma}v_1 & -\bar{\gamma}v_2 & -\bar{\gamma}v_3 & \bar{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$L = \begin{bmatrix} 2\beta & 0 & 0 & \beta & \beta \\ 2v_1\beta & 0 & 0 & (v_1 + a)\beta & (v_1 - a)\beta \\ 2v_2\beta & 1 & 0 & v_2\beta & v_2\beta \\ 2v_3\beta & 0 & 1 & v_3\beta & v_3\beta \\ 2\beta(\bar{\gamma}v^2 - \alpha)/\bar{\gamma} & v_2 & v_3 & \beta(H_t + av_1) & \beta(H_t - av_1) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

ここで、

$$\bar{\gamma} = \gamma - 1, \quad \alpha = 0.5\bar{\gamma}v^2, \quad \beta = 1/(2a^2), \quad a^2 = \gamma p/\rho \quad (2.55)$$

a は音速で、 γ は比熱比である。

第3章 微分方程式の離散化

この章ではコンピュータを利用して流れを解くために、流体の支配方程式である微分方程式をいかに離散化するかについて述べる。

3.1 離散化モデル

一旦、物理モデルとそれに対応する連立微分方程式が選ばれると、次の仕事はその離散化モデルを構築することである。それは微分方程式を考慮して実行される。このステップは2つの部分からなる。一つは場の離散化で、もう一つは方程式の離散化である。最初のはメッシュあるいはグリッド(格子)を作ることである。これにより流体の領域は有限個の点で置き換えられる。それらの点で変数の値が決定されなければならない。

2番目のステップは、微分方程式あるいは積分方程式を連立の離散代数方程式へ変換する作業である。そこでは格子点での未知量を含んでいる。

流体の問題は一般的に時間依存の問題で、そこでは、空間座標と時間が独立変数として含まれるので、方程式の離散化は空間と時間の両方に関して行われる。その中間の段階として、空間の離散化は実行されるが、時間の離散化は実行されない場合も考えられる。それらは時間に関する常微分方程式になり、これらは半離散化と呼ばれ、対応する方程式は半離散化方程式と呼ばれる。

ここでは、まず、有限体積法(Finite Volume Method, FVM)を使った微分方程式の半離散化から始める。その後で、時間の離散化に対するいくつかの問題点を考える。そして、最後に、離散方程式あるいは数値計算法に関するいくつかの重要な特徴を議論する。

3.2 空間の離散化に対する有限体積法

方程式を離散化するのにいくつかの一般的な方法が広く使用されている。例えば、差分法(finite difference method)、有限要素法(finite element method)、有限体積法(finite volume method)などがある。それらの中で、FVMは次の2つの重要な特徴をもっている。

- 任意の格子、あるいはそれに関連して任意の形状に関して柔軟性をもつ。
- 質量、運動量、エネルギーという基本的な量が保存される。特に、それは保存則を表す積分形からの直接的な離散化による離散化レベルでの保存性である。

有限体積法の主な概念は検査体積である。それは次のようである。 Ω を今考えている問題(流れ場)の領域、つまり計算領域とする。 (x_k) は Ω 内での格子である。格子 x_k を持った Ω_k は Ω の部分領域である。

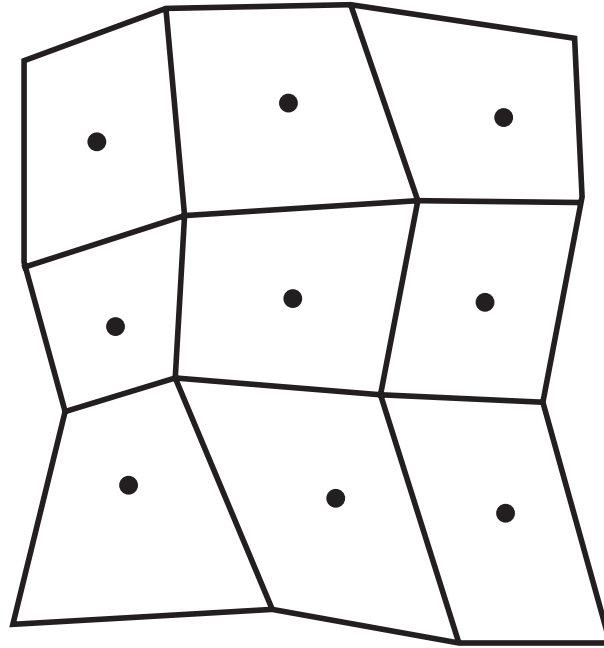


図 3.1: 構造格子

定義 1 部分領域 Ω_k は、以下の条件を満たす時、格子 x_k に対応した検査体積となる。

- $x_k \in \Omega_k, \forall k$
- $\Omega = \cup \bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$
- $\Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset, \forall k, l, k \neq l$

対応する検査体積を持った、有限体積法にとって適切な格子を作る通常の方法は、計算領域を多角形あるいは多面体からなるいくつかの検査体積に分割し、それらの中心を格子点として定義することである。主に、2つのタイプの格子が考えられる。

- 構造格子：あらゆる格子点は2種類あるいは3種類の座標線群の交点にある。その結果、2種類の添え字 i, j 、あるいは3種類の添え字 i, j, k が付けられる。検査体積はこの場合四角形あるいは六面体である。その例が第 3.1 図に示されている。
- 非構造格子：格子点は座標線と一致しない。それゆえ、それらは2種類の整数、あるいは3種類の整数によって記述されない。しかし、それらは個々にある順序で番号付けできる。その一つの例が第 3.2 図に示されている。

ここで、 (x_k) を一組の検査体積 (Ω_k) に対応した格子とする。その Ω_k は計算領域全体 Ω をカバーする。

$$\Omega = \cup \bar{\Omega}_k \quad (3.1)$$

ここで、スカラー量 u に対する保存方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \otimes f = q, \quad u = u(x, t), \quad x \in \Omega \quad (3.2)$$

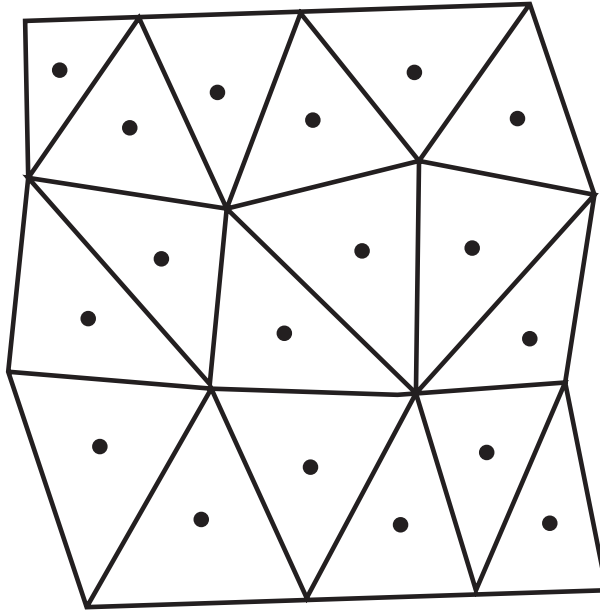


図 3.2: 非構造格子

式 (3.2) の積分形の方程式を各検査体積 Ω_k に適用することにより、有限体積法の離散化が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_k} u d\Omega + \int_{\Omega_k} (f \cdot n) ds = \int_{\Omega_k} q d\Omega \quad (3.3)$$

式 (3.3) の中の積分の部分近似すると以下ようになる。

$$\int_{\Omega_k} u d\Omega = u_k \omega_k, \quad \int_{\Omega_k} (f \cdot n) ds = \sum_{\sigma} (f_{\sigma} \cdot n) s_{\sigma} \quad (3.4)$$

ここで、 ω_k は領域 Ω_k の体積、 σ は検査体積の面、 s_{σ} はその面積、 n はその面に垂直で、外方向の単位ベクトルである (第 3.3 図参照)。このようにして、半離散化方程式が以下のように得られる。

$$\frac{u_k \omega_k}{\partial t} + \sum_{\sigma} (f_{\sigma} \cdot n) s_{\sigma} = \omega_k q_k \quad (3.5)$$

ここで、離散関数 u_k は未知量で、解かれるべき量である。

以上が、スカラー量に対する保存方程式の有限体積法による半離散化方程式への一般的な方法である。その中には検査体積の幾何学的特性量である ω_k や s_{σ} が含まれている。離散関数 u_k は検査体積内での u の平均量とみなされ、また、 f_{σ} はその各面での平均値である。これを数値流束と呼ぶ。

実際、式 (3.5) は数値流束の選び方で幅広いスキームを表すことになる。一つのスキームに特定するには、数値流束 f_{σ} を離散関数 u_k の関数として定義する必要がある。それをどのように正しく定義するかがここでのもっとも重要な課題である。

問題 1 2 ベクトル量に対する保存方程式の有限体積法による半離散化方程式を求めよ。

有限体積法による半離散化方程式 (3.5) は 1 次元、2 次元、3 次元に対して有効である。それぞれに対して以下のことを考慮すれば良い。

- 1 次元では検査体積は R^1 空間における間隔を表し、 ω_k は長さで、 $s_{\sigma} = 1$ である。

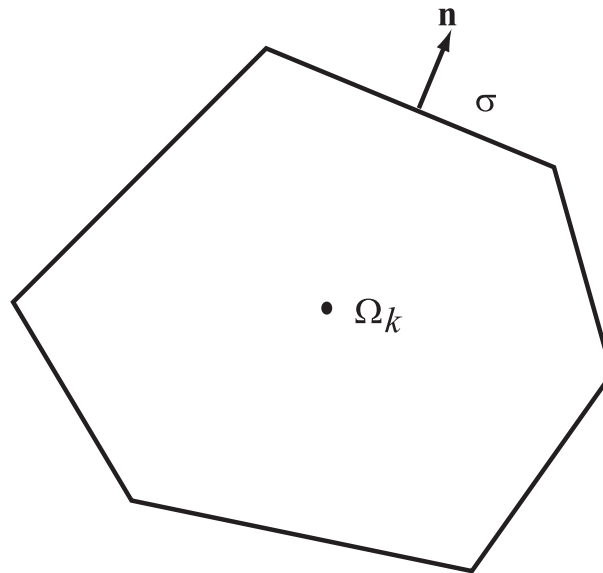


図 3.3: 検査体積

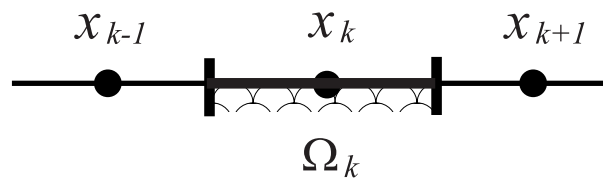


図 3.4: 1次元セル

- 2次元では検査体積は R^2 空間における多角形を表し、 ω_k はその面積で、 s_σ は辺の長さである。
- 3次元では検査体積は R^3 空間における多面体を表し、 ω_k はその体積で、 s_σ はその面積である。

これらの例として、第 3.4 ~ 3.6 図を参照されたい。

問題 13 ガウスの発散定理を使って、任意の多角形状をもつ一つの検査体積に対する 2次元での ω_k に対する具体的な式を誘導せよ。(ヒント: スカラー場 $a(x)$ に対してガウスの発散定理を適用し、その後で、 $a(x) = x_1$ とおく。ただし、 $x = (x_1, x_2)$ である。)

3.3 オイラーモデルに対する有限体積法による半離散化方程式

オイラーモデルに対する連立方程式はベクトル形式で以下のように書かれる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.6)$$

ここで、

$$u = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, e_t)^t \quad (3.7)$$

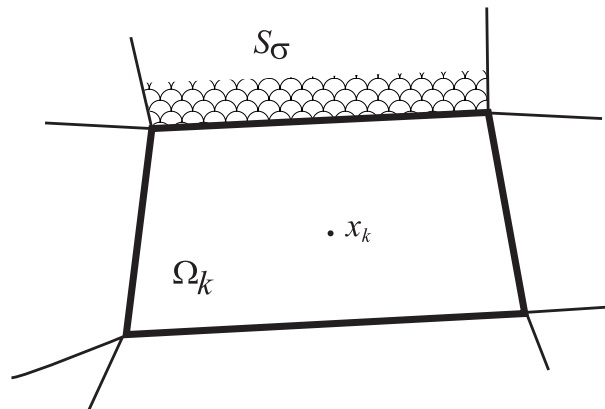


図 3.5: 2次元セル

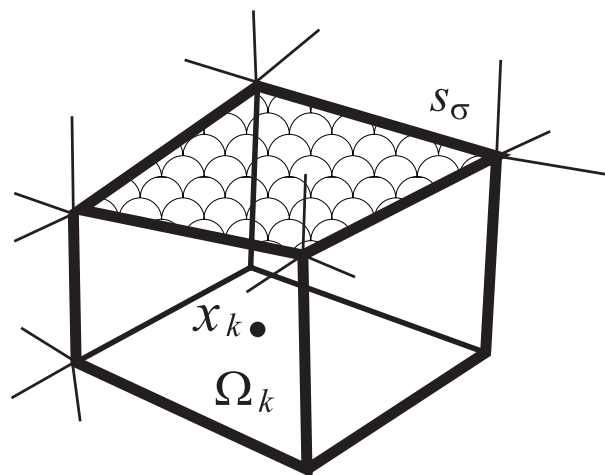


図 3.6: 3次元セル

$$f_k = (\rho u_k, \rho u_1 u_k + \delta_{1k} p, \rho u_2 u_k + \delta_{2k} p, \rho u_3 u_k + \delta_{3k} p, H_t)^t \quad (3.8)$$

ここで、 (u_1, u_2, u_3) は速度ベクトルのデカルト座標成分である。

この連立方程式に対して有限体積法を適用すると、以下の半離散化方程式が得られる。

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = - \sum_{\sigma} (f_{j,\sigma} n_j) s_{\sigma} \quad (3.9)$$

この式では j に関してのみ和が計算される。ここで、 $f_{j,\sigma}$ はセル表面 σ に分布する流束ベクトル f_j の平均値であり、 $n = (n_1, n_2, n_3)$ はセル表面での単位ベクトルである。また、 $l = (l_1, l_2, l_3)$ 、 $m = (m_1, m_2, m_3)$ で、 n, l, m が局所基底座標をなすような単位ベクトルである。

セル表面に関する変換行列 T_{σ} とベクトル F_{σ} を導入すると、以下のようになる。

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & l_1 & l_2 & l_3 & 0 \\ 0 & m_1 & m_2 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$F_{\sigma} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, H_t)^t \quad (3.11)$$

ここで、 (u, v, w) は局所基底座標における速度ベクトルの成分である。これを使うと式 (3.9) の右辺は変換されて以下ようになる。

$$\sum_j (f_{j,\sigma} n_j) = T_{\sigma}^{-1} F_{\sigma} \quad (3.12)$$

以上より、結局、有限体積法におけるオイラーモデルに対する離散式は以下のような。

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = - \sum_{\sigma} T_{\sigma}^{-1} F_{\sigma} s_{\sigma} \quad (3.13)$$

問題 1 4 式 (3.12) を証明せよ。

これらの式を見ると、オイラーモデルに対する数値流束はただ一つのベクトル F_{σ} で表されることが分かる。このベクトルは以下に示す 1 次元オイラー方程式に対する 1 次元流束と全く同じである。

$$\frac{\partial U_{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial n} = 0, \quad U_{\sigma} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e_t)^t \quad (3.14)$$

ここで、 $\partial/\partial n$ は局所基底座標における法線方向の微分である。これらの結果は以下のようにまとめられる。

命題 1 検査体積の各面上での、オイラーモデルに対する有限体積法による半離散化方程式における数値流束は、各面に垂直方向に書かれた 1 次元オイラー方程式に対する 1 次元流束に等しい。

このオイラーモデルのすばらしい性質により、簡単に 1 次元問題から多次元問題へと半離散化方程式を拡張できる。以上の理由により、以下ではほとんどの場合 1 次元問題を考える。

3.4 時間積分法の基礎

一度空間に関する離散化がなされると、その結果得られる半離散化方程式は、格子点に関する未知量 (u_k) に関する連立常微分方程式となる。これを適当な方法により数値的に解く必要がある。未知量のベクトルを $U = (u_k)$ とおくと、半離散方程式 (3.5) は以下のように書かれる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = H(U, t) \quad (3.15)$$

ここで、 $H(U, t)$ は数值流束の和と式 (3.5) の右辺を含む空間離散化量である。

ここで、時間に関する離散化のために、(t^k) を考える。時間刻み Δt をもつ一組の離散時間レベル $t^k (t^k = t_0 + k\Delta t)$ とする。これらを使用すると、線形 k 段階積分法と呼ばれる時間積分法に関する一般的な記述が、以下のように導入される。

定義 2 式 (3.15) に関する時間離散化は次の形を取る。

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j U^{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j H^{n+j} \quad (3.16)$$

ここで、 $U^n = U(t^n)$, $H^n = H(U^n, t^n)$ である。また、 α_n, β_n は以下の条件を満たす。

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \quad \sum_{j=0}^k j\alpha_j = \sum_{j=0}^k \beta_j = 1 \quad (3.17)$$

これらは線形 k 段階時間離散化と呼ばれる。

条件 (3.17) は、式 (3.16) が式 (3.15) と、問題 1 4 の意味で一致するために適用する必要がある。

問題 1 5 U を式 (3.15) の解であるとする。このとき、 Δt が 0 に近づいた時、 U が式 (3.16) の解であるためには、統一条件 (3.17) が成り立つことが必要十分条件であることを示せ。(ヒント：関数 U のテーラー展開を利用しなさい。)

実用的な面から 3 つの時間レベル (2 段階) 以上の方法はコストが掛かるのであまり使用されない。その理由は、ベクトル U は各時間レベルでメモリーに貯える必要があるからである。今、

$$\xi = \alpha_0, \quad \theta = \beta_2, \quad \phi = \beta_0 \quad (3.18)$$

とおくと、線形 2 段階法は 3 つの任意のパラメータ ξ, θ, ϕ をもつ一組のスキームとなる。

$$(1 + \xi)U^{n+1} - (1 + 2\xi)U^n + \xi U^{n-1} = \Delta t [\theta H^{n+1} + (1 - \theta - \phi)H^n + \phi H^{n-1}] \quad (3.19)$$

ξ, θ, ϕ にそれぞれ具体的な値を与えると、様々な時間積分スキームが導かれる。これらの方法は 大別して、2 つの方法に分けられる。一つは陽的な方法で、もう一つは陰的な方法である。

定義 3 陽的スキームと陰的スキーム 2 段階の線形スキーム (式 (3.19)) は、もし、 $\theta = 0$ であれば陽的スキームと呼ばれ、 $\theta \neq 0$ であれば陰的スキームと呼ばれる。

陽的スキームに対しては次の時間レベル U^{n+1} は未知量で、これは式 (3.19) から陽的に、つまりそのまま直接に求められる。これに対して、陰的なスキームに対しては未知量は H^{n+1} の中に含まれている。これは別の方法で解く必要がある。

もし、 $\xi = \phi = 0$ であるならば、これは単段スキームである。つまり、2つの時間レベルのみを持つもので、一般化された台形法則として知られている。

$$U^{n+1} - U^n = \Delta t[\theta H^{n+1} + (1 - \theta)H^n] \quad (3.20)$$

このスキームは実用的な応用において広く使われている。特に、以下の場合には有名である。

- $\theta = 0$: オイラーの陽解法
- $\theta = 1$: オイラーの陰解法
- $\theta = 0.5$: クランク・ニコルソン法

テーラー展開を使うと以下の命題が証明できる。

命題2 k 段解法において到達できるスキームの最大精度は $2k$ である。

このことから、1段階スキームはせいぜい2次精度であり、第2段階スキーム(式(3.19))はせいぜい4次精度である。

問題16 以下の事を証明せよ。

- 1) 1段階解法(式(3.20))において唯一2次精度になるのは $\theta = 0.5$ のときである。これはクランク・ニコルソン法と呼ばれる。
- 2) 2段階解法において唯一4次精度になるのは $\theta = -\phi = -(1/3)\xi = 1/6$ のときである。

3.5 陰的な方法の解像度(予測子・修正子と線形化法)

陰的なスキームにおいて未知解ベクトル U^{n+1} は式(3.19)の右辺の中に $H^{n+1} = H(U^{n+1})$ として含まれている。ここで H は一般的には非線形な関数である。それゆえ、陰的なスキームを解くためには連立代数方程式(3.19)を U^{n+1} に関して解く必要がある。実際には反復的な手法が用いられる。

最も簡単な方法は予測子・修正子法である。まず、最初に予備的な予測値 \bar{U}^{n+1} が陽的な方法で計算される。

$$\bar{U}^{n+1} = \bar{U}^n + \Delta t H^n \quad (3.21)$$

このステップは予測子のステップと呼ばれる。その後で、式(3.19)が以下のように解かれる。

$$(1 + \xi)U^{n+1} - (1 + 2\xi)U^n + \xi U^{n-1} = \Delta t[\theta \bar{H}^{n+1} + (1 - \theta - \phi)H^n + \phi H^{n-1}] \quad (3.22)$$

ここで、 $\bar{H}^{n+1} = H(\bar{U}^{n+1})$ であり、これは U^{n+1} に対しては陽的な方法として扱われる。

別の方法として、ニュートン法がある。これは線形な連立代数方程式を作り、それは特別な方法を用いて効率良く解かれる。そこでは非線形項が局所的に線形化される。

$$H^{n+1} = H(U^{n+1}) = H^n + \left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)(U^{n+1} - U^n) + O(\Delta t^2) \quad (3.23)$$

ここで、 $\partial H/\partial U$ はヤコビアン行列である。これを A と書き、 $(\Delta t)^2$ のオーダーの項を落とし、式 (3.23) を式 (3.19) に代入すると、 $\Delta U^n = U^{n+1} - U^n$ に関する線形連立方程式を得る。

$$[(1 + \xi)I - \Delta t \theta A] \Delta U^n = \Delta t (H^n - \phi \Delta H^{n-1}) + \xi \Delta U^{n-1} \quad (3.24)$$

これは Δ 形での **Beam-Warming** 法として知られている。

3.6 時間積分に関するルンゲ・クッタ法

線形の多段階法に変わるものとして、ルンゲ・クッタ法は 1 段階の陽的な、しかし、高次精度を持つ非線形な方法としての特徴を持つ。この方法の主たる考え方は半離散的方程式の右辺を時間間隔 (t_n, t_{n+1}) の間にあるいくつかの U で評価することである。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = H(U, t) \quad (3.25)$$

その後で、それらを合計して高次精度を得る。 k 段階ルンゲ・クッタ法の一般的な公式は以下のようである。

$$U^1 = U^n, \quad U^2 = U^n + \alpha_2 \Delta H^2, \quad U^j = U^n + \alpha_j \Delta H^j, \quad (3.26)$$

$$U^{n+1} = \Delta t \sum_{j=1}^k \beta_j H^j \quad (3.27)$$

ここで、 $H^j = H(U^j)$ である。また、 α_j, β_j は一定値で、次の統一条件を満たす。

$$\sum_{j=1}^k \beta_j = 1 \quad (3.28)$$

一般に広く使われているのは 4 段階ルンゲ・クッタ法であり、それらの係数は以下のようである。

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0.5, \quad \alpha_4 = 1, \quad \beta_1 = \beta_4 = 1/6, \quad \beta_2 = \beta_3 = 1/3 \quad (3.29)$$

これは時間積分に対して 4 次精度を持つ。

3.7 離散方程式の基礎的特徴 (一貫性、安定性、収束性)

ここで離散方程式の解を元々の微分方程式の解と関係づける一貫性、安定性、収束性についての基礎的な定義を与える。一般性を失う事無く、1 次元問題、つまり、空間座標 x および時間 t を独立変数とした方程式と考えてよい。

L を微分演算子とし、 $L_{\tau, h}$ を離散演算子とし、それぞれ以下の関係を満たすものとする。

$$Lu(x, t) = 0, \quad (3.30)$$

$$L_{\tau, h}(u_j^n)(x, t) = 0 \quad (3.31)$$

ここで、 τ, h は時間及び空間の刻み幅を表す。また、 u_j^n は (x, t) 平面の格子点 $(jh, n\tau)$ での離散関数の値である。

今、解析関数 $\phi = \phi(x, t)$ を考えよう。その格子点への投影を ϕ_j^n 、 $L(\phi)$ の投影を $((L\phi)_j^n)$ とする。以下のように定義される格子の関数を ε_τ とする。

$$\varepsilon_\tau = (L\phi)_j^n - L_{\tau, h}\phi_j^n \quad (3.32)$$

これは打切り誤差と呼ばれ、以下の定義が導入される。

定義4 一貫性

もし、任意の有界な関数 ϕ に対して、 τ, h をゼロにしたとき、打切り誤差がゼロになれば、離散演算子 $L_{\tau, h}$ は微分演算子 L と一貫性がある。つまり、

$$\lim_{\tau, h \rightarrow 0} \varepsilon_\tau = 0 \quad (3.33)$$

離散化の精度のオーダーは、また、打切り誤差によって定義される。

定義5 近似のオーダー

もし打切り誤差の漸近挙動が

$$\varepsilon_\tau = O(h^p, \tau^q), \quad h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0 \quad (3.34)$$

のとき、この離散化は空間に関してオーダー p 、時間に関してオーダー q である。

別の意味において、一貫性の基本的な考え方は、離散演算子は τ, h がゼロになったとき、それに関連した微分演算子に近づくという事である。通常、一貫性と近似のオーダーはテーラー展開を用いて求められる。

問題17 以下の微分演算子 L と2つの離散演算子 $L_{\tau, h}^1, L_{\tau, h}^2$ を考えなさい。

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.35)$$

$$L_{\tau, h}^1(u_j^n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \quad (3.36)$$

$$L_{\tau, h}^2(u_j^n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{2h} \quad (3.37)$$

この離散演算子が微分演算子と一貫性があることを証明せよ。また、それらの近似の精度を求めよ。

安定性は初期値問題で初期値を微小に変化させたときに生じる解の安定性と関連した一般的な概念である。離散方程式(3.31)に適用すると、安定性の定義が以下のように導入される。

定義6 (安定性) 離散方程式(3.31)は、もし、任意の2つの解 u_j^n と \bar{u}_j^n に対して以下の不等式が成立するならば、安定である。

$$\|u_j^n - \bar{u}_j^n\| \leq K \|u_j^0 - \bar{u}_j^0\|, \quad \forall n \quad (3.38)$$

ここで K は n はお互いに独立の定数である。

系 離散方程式(3.31)が安定で均質である(例えば、 $u_j^n = 0$ が解)とする。その時、解は一様に有界である。

$$|u_j^n| \leq K, \quad \forall n \quad (3.39)$$

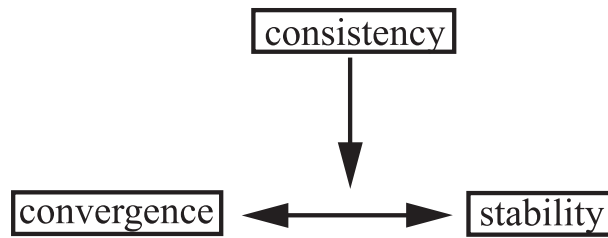


図 3.7: Lax の定理

離散モデルの精度を調べるために、フーリエ法がしばしば使われる。一般には線形方程式に対して使われるので、一つの振動の解の形で解の挙動を解析する。

$$u_k^n = \lambda^n \exp(ik\phi) \quad (3.40)$$

ここで $i = \sqrt{-1}$ は複素単位である。 λ, ϕ は定数で、それぞれ、調和振動の振幅、および波数と呼ばれる。この解を離散方程式に代入すると、 λ に関する方程式が、式 (3.40) のゼロでない解が存在するという条件から誘導される。特性方程式と呼ばれるこの方程式は、 λ を τ, h, ϕ の関数として定義する。安定であるためには、離散方程式の解は有界でなければならない。特別な場合として、解 (3.40) もまた有界でなければならない。その結果、

$$|\lambda| \leq 1 \quad (3.41)$$

も成立しなければならない。これは τ, h の取り得る値を制限するある条件を生み出す。それが安定のための必要条件である。

問題 18 離散方程式 (3.31) に対する安定性を式 (3.36) 式 (3.37) の形をもつ離散演算子を使用して解析せよ。

離散方程式と微分方程式の一致性は収束性によって保障される。

定義 7 (収束性) 離散方程式 (3.31) の解 u_j^n は以下の条件を満足するときに、微分方程式 (3.30) の解 $u(x, t)$ に収束するといわれている。つまり、 τ, h がゼロに行くとき、一様にゼロに収束する。

$$\|u_j^n - u(jh, n\tau)\| \rightarrow 0 \quad (3.42)$$

各々の解が式 (3.30) の解に収束するならば、離散化は収束する。

一貫性、安定性、収束性は、Lax の基礎的等価定理によって関係づけられている。

定理 (Lax の等価定理) : 意味のある初期値問題に対する離散化が一貫性をもつならば、収束性に対する必要かつ十分な条件は離散化が安定であることである。

このことから、数値シミュレーションに使われる離散化の解が微分方程式モデルに対して十分であることを保障するためには、その一貫性と安定性のみを調べれば十分である。

第4章 中心流束と風上数値流束

有限体積法を保存形での方程式に適用すると、ある与えられた数値流束をもつ半離散スキームのグループが導かれる。以下の1次元の方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = f(u) \quad (4.1)$$

すべての保存性の半離散スキームは以下の形に書かれる。

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = -\frac{1}{h}[F_{k+1/2} - F_{k-1/2}] \quad (4.2)$$

$$F_{k+1/2} = F(u_{k-j+1}, \dots, u_{k+j}) \quad (4.3)$$

ここで、 k は格子点を、 $k+1/2$ は格子点と格子点との間(あるいはセルの境界)を表す。また、 h は空間刻み幅で、 $h = x_{k+1/2} - x_{k-1/2}$ である。(図4.1参照)

$F_{k+1/2}$ は $2j$ 点の数値流束と呼ばれ、一方、スキーム(4.1)および(4.2)は $2j+1$ 点の保存型半離散スキームと呼ばれる。ある一つのスキームを作るためには、関数 $F(u_{k-j+1}, \dots, u_{k+j})$ を以下の一貫性の条件を満たす形で定義する必要がある。

$$F(u, \dots, u) = f(u) \quad (4.4)$$

数値流束を評価するのに多くの方法がある。それらは2つのグループに分けられる。つまり、空間中心法と風上法である。ここでは、歴史的に最初に現れた空間中心法のアルゴリズムについて説明する。それらは数値流束の計算法が局所局所で固定されている。一方、風上差分では流束の計算に使用する格子点は、解ベクトル (u_k) の局所分布を考慮して決定される。

4.1 陽的な空間中心法(1段階Lax-Wendroffスキーム)

式(4.1)に対する最小2点ステンシルの数値流束を持つ陽的な時間積分は以下のように離散化される。

$$u_k^{n+1} - u_k^n = \lambda(F_{k-1/2}^n - F_{k+1/2}^n), \quad F_{k+1/2}^n = F(u_k^n, u_{k+1}^n) \quad (4.5)$$

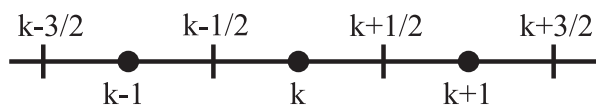


図 4.1: 格子点

これに対する簡単な空間中心数値流束は以下のように定義される。

$$F_{k+1/2}^n = 0.5[f(u_k^n) + f(u_{k+1}^n)] = 0.5(f_k^n + f_{k+1}^n) \quad (4.6)$$

これは以下の離散方程式を導く。

$$u_k^{n+1} - u_k^n = \frac{\lambda}{2}(f_{k-1}^n - f_{k+1}^n) \quad (4.7)$$

このスキームは無条件に不安定である。それはフーリエ法を使うことにより容易に確認できる。フーリエ法とは別に、離散方程式(4.7)と共役関係にある微分方程式を解析する方法がある。

これらの微分方程式は、1階の微分近似(FDA, First Differential Approximation)の方程式と呼ばれ、式(??)の十分にスムーズな解を代入し、それをテーラー展開し、 $O(\tau, h)$ より大きいオーダーの高次の項を落とすことにより、離散方程式から誘導される。このようにして、式(4.7)に対するFDA方程式は以下のように書かれる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} A^2 \frac{\partial}{\partial x} u \quad (4.8)$$

ここで、 $A = \partial f / \partial u$ はヤコビアン行列である。

問題19 式(4.8)を導け。

もし、共役なFDA方程式が安定であるならば、離散方程式も安定であることは明らかである。すなわち、これらの方程式に対する初期値問題の解は、初期値の微少な変化に対して安定である。ここで、式(4.8)が不安定であるというのは、それが負の拡散係数を持つ拡散方程式の形になっているからである。その結果、最も簡単な空間中心離散化式である式(4.7)は不安定となる。

以上のことから、式(4.7)を安定にするためには、式(4.7)の右辺に式(4.8)の2階微分を相殺するような項を加えることである。以下の近似を考慮すると、

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial f}{\partial x} \right]_k \approx [A_{k+1/2}(f_{k+1} - f_k) - A_{k-1/2}(f_k - f_{k-1})] / h^2 \quad (4.9)$$

式(4.7)は以下のように変えることが出来る。

$$u_k^{n+1} - u_k^n = \frac{\lambda}{2}(f_{k-1}^n - f_{k+1}^n) + \frac{\lambda^2}{2}[A_{k+1/2}(f_{k+1} - f_k) - A_{k-1/2}(f_k - f_{k-1})] \quad (4.10)$$

この離散化は、もし行列 $A_{k+1/2}$ を以下のように計算すれば、1段階Lax-Wendroff法として広く知られているスキームになる。

$$A_{k+1/2} = A(u_{k+1/2}), \quad u_{k+1/2} = 0.5(u_k + u_{k+1}) \quad (4.11)$$

あるいは

$$A_{k+1/2} = 0.5(A_k + A_{k+1}) \quad (4.12)$$

式(4.10)の保存形に対応する数値流束は

$$F_{k+1/2}^n = 0.5(f_k^n + f_{k+1}^n) - \frac{\lambda}{2} A_{k+1/2}(f_{k+1} - f_k) \quad (4.13)$$

となる。

4.2. 2段階の Lax Wendroff のスキーム (Richtmyer のスキームおよび MacCormack のスキーム)35

注意：元々、1段階の Lax Wendroff のスキームは以下のように求められる。

$$u_k^{n+1} \approx u_k^n + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_k^n + 0.5\tau^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_k^n \quad (4.14)$$

ここで、時間微分は微分方程式 (4.1) によって空間微分に置き換えられる。

問題 2 0 1 段階の Lax Wendroff のスキームを上での注意のところで述べられた方法に従って誘導せよ。

1 段階の Lax Wendroff スキームの安定性をチェックするために、ここではフーリエ法を離散方程式 (4.10) に適用する。それは、以下に示すある調和関数の形を持つ離散方程式の一つの特解は有界でなければならないという、安定性に対する必要条件を与える。

$$u_k^n = v_0 \rho^n \exp(ik\phi) \quad (4.15)$$

式 (4.15) の形で解が存在する条件は、 ρ が以下に示す行列 G の固有値であるということに等価である。

$$G = I - i\lambda(\sin\phi)A - \lambda^2(1 - \cos\phi)A^2 \quad (4.16)$$

これは増幅行列と呼ばれる。ここで、流束 f は、 $f = Au$ (A は一定のヤコビアン行列) のように u の線形関数であると仮定されている。というのは、フーリエ法は線型方程式にのみ適用可能であるからである。

解 (4.15) は、もし $|\rho| \leq 1$ であれば有界である。ここで、安定性のためには、 G のスペクトル半径が 1 に等しいかそれ以下でなければならない。つまり、

$$r(G) \leq 1 \quad (4.17)$$

この条件は以下の形の安定条件になる。

$$\lambda r(A) \leq 1 \Rightarrow \frac{\tau}{h} r(A) \leq 1 \quad (4.18)$$

ここで、 $r(A)$ は行列 A のスペクトル半径 (固有値の最大値) を示す。

問題 2 1 1 段階の Lax Wendroff のスキームに対する安定条件 (4.18) を求めよ。

4.2 2段階の Lax Wendroff のスキーム (Richtmyer のスキームおよび MacCormack のスキーム)

1 段階の Lax Wendroff のアルゴリズムはヤコビアンを計算する必要があるため、実際の計算ではコストが掛かる。これを避けるために、いくつかの 2 段階スキームが提案されてきた。そのほとんどは、2 段階予測子・修正子法に基づく。線形流束 $f = Au$ ($A = const$) の場合に対しては、1 段階の Lax Wendroff 法と一致する。

ここで Richtmyer のスキームについて考える。このスキームは陽的な方法で、保存形では以下のように書かれる。

$$u_k^{n+1} - u_k^n = -\lambda(F_{k+1/2} - F_{k-1/2}), \quad \lambda = \tau/h \quad (4.19)$$

ここで、流束は途中の段階での値が使用される。

$$F_{k+1/2} = \bar{f}_{k+1/2} = f(\bar{u}_{k+1/2}), \quad (4.20)$$

$$\bar{u}_{k+1/2} = 0.5(u_k^n + u_{k+1}^n) - 0.5\lambda(f_{k+1}^n - f_k^n) \quad (4.21)$$

問題 2 2 Richtmyer スキームが線形流束 $f = Au$ に対して 1 段階の Lax Wendroff のスキームと同等であることを示せ。ただし、 A は一定の行列である。

問題 22 から、Richtmyer スキームは空間および時間に関して 2 次精度である。また、条件 (4.18) を満たせば安定である。これは Lax Wendroff のスキームと同様である。ただし、Richtmyer スキームでは、ヤコビアン行列を計算する必要がないというメリットがある。

上で述べた特徴を持つ別のスキームとして、2 段階予測子・修正子法である MacCormack 法がある。このスキームは最も広く使われて来た。このスキームは Lax Wendroff のスキームからの発展版である。これは、以下に示す数値流束を持つ保存形の式 (4.19) で書かれる。

$$F_{k+1/2} = 0.5(\bar{f}_k + f_k^n), \quad \bar{f}_k = f(\bar{u}_k), \quad (4.22)$$

$$\bar{u}_k = u_k^n - \lambda(f_k^n - f_{k-1}^n) \quad (4.23)$$

問題 2 3 MacCormack スキームは線形流束 $f = Au$ に対して、1 段階の Lax Wendroff 法と同等であることを示せ。ここで、 A は一定の行列である。

MacCormack スキーム (4.19)、(4.22)、(4.32) はまた一つの重要なオイラーの陰解法とみなせる。そこでは、数値流束は右側の格子点で評価され、予測子・修正子法で解かれる。一方、予測子の段階での値は保存形の陽解法で計算される。そのとき、数値流束は左側の格子点で評価される。

スキーム (4.19) に対する定常解に対しては、数値流束は以下のバランスの条件を満たす必要がある。

$$F_{k+1/2} = F_{k-1/2}, \quad \forall k \quad (4.24)$$

この観点から、上で考えられたスキームを調べると、以下の結論を得る。定常解は線形の場合に対して次の方程式を満たすことになる。

$$u_{k+1} - u_{k-1} = \lambda A(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \quad (4.25)$$

この結果、これは時間刻み τ に依存することになる。この事実は中心スキームすべての欠点である。というのは、それは非物理的なパラメータに依存することになるからである。

4.3 多次元方程式への一般化

上で考えられた 1 次元の空間中心離散化を多次元のオイラー方程式に適用するために、ここでは第 3 章で導入された一般的な方法を採用する。陽的な時間積分をもつオイラー方程式の有限体積法による空間離散式は以下のように書かれる。

$$u_k^{n+1} - u_k^n = -\tau \sum_{\sigma} s_{\sigma} T_{\sigma}^{-1} F_{\sigma} \quad (4.26)$$

ここで、 u は保存変数のベクトルを表し、以下に示す 1 次元オイラー方程式に関する局所的な 1 次元流束 F_{σ} によって完全に定義される。

$$\frac{\partial U_{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial n} = 0, \quad U_{\sigma} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e_t)^t \quad (4.27)$$

ここで $\partial/\partial n$ はセル表面 σ の局所基底座標における面に垂直方向の微分を表す。また、 u, v, w はこの基底座標における速度ベクトルの成分である。(3 章の命題 1 を参照)

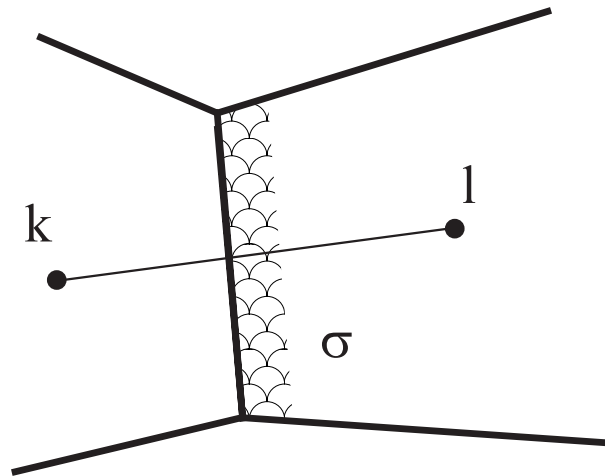


図 4.2: 相隣接するセルおよびその境界面

このことから、直ちに、1次元流束に対する公式を流束 F_σ に適用できる。格子点 k と l に関する2つの検査体積が接続するセル境界面を考える(第2図参照)。また、基底座標における保存変数のベクトルを U 、それに対応する流束を F で示すと、

$$U = T_\sigma u = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e_t)^t, \quad (4.28)$$

$$F = F(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho v u, \rho w u, H_t)^t \quad (4.29)$$

となる。

1次元空間中心数値流束は以下の様にして多次元に拡張される。

1) Lax-Wendroff スキーム :

$$F_\sigma = 0.5(F_k + F_l) - 0.5\lambda A_{kl}(F_k - F_l) \quad (4.30)$$

2) Richtmyer スキーム

$$F_\sigma = \bar{F}_\sigma, \bar{F}_\sigma = F(\bar{U}_\sigma), \bar{U}_\sigma = 0.5(U_k^n + U_l^n) - 0.5\lambda(F_k - F_l) \quad (4.31)$$

3) MacCormack スキーム

$$F_\sigma = 0.5(\bar{F}_k + F_l), \bar{F}_k = F(\bar{U}_k), \bar{U}_k = U_k - \lambda(F_l - F_k) \quad (4.32)$$

式(4.30)から式(4.32)において、 $\lambda = \tau/h$ であり、 h は格子点 k と l との間の距離である(図2参照)。

問題 2.4 一定間隔 h_x, h_y, h_z をもつ3次元直方体格子に対して考えられるスキームを作れ。

4.4 人工粘性

上で考えられたすべての2次精度空間中心スキームは強い不連続のところで振動解を生じる。例として、線形スカラー方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.33)$$

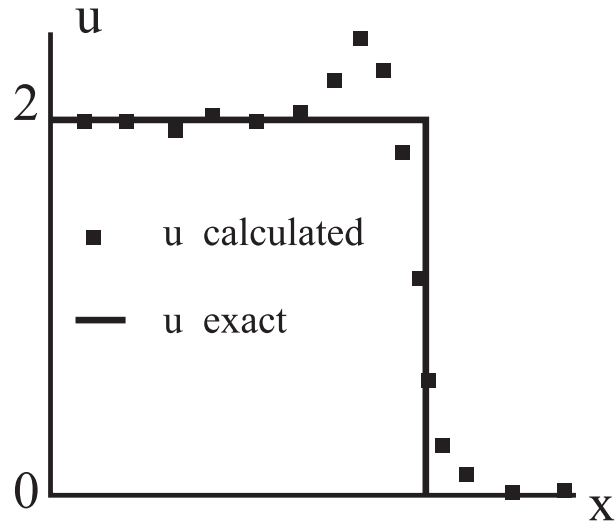


図 4.3: 2次精度 Lax-Wendroff スキーム

の数値解を考える。これに対する一つの不連続を持つ初期データとして

$$u(0, x) = 2 \text{ for } x < 0, \quad u(0, x) = 0 \text{ for } x > 0 \quad (4.34)$$

を考える。これに対して以下の2つのスキームで数値的に解くことを考える。

- a) 2次精度の Lax-Wendroff スキーム
- b) Lax-Friedrichs スキーム

Lax-Friedrichs スキームは1次精度のスキームで、スカラー方程式に対する保存形の形で以下のように書かれる。

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -\lambda(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}), \quad \lambda = \Delta t/h \quad (4.35)$$

$$F_{i+1/2} = 0.5(f_i^n + f_{i+1}^n) - \frac{1}{2\lambda}(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (4.36)$$

この数値解は第3図と第4図に示されている。

現象をより良く理解するために、これらのスキームに対するFDA方程式を考える。というのはFDA法は打ち切り誤差に対する方程式であるからである。それらはそれぞれ以下の形の式となる。

Lax-Friedrichs 方程式に対しては

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h^2}{2\Delta t}(1 - \lambda^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.37)$$

Lax-Wendroff スキームに対しては

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{h^2}{6}(1 - \lambda^2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (4.38)$$

問題 2 5 方程式 (4.37) と (4.38) を導け。

ここで考えている初期値に対しては、(4.37) と (4.38) の解は以下のように自己相似形となる。

$$u = u(\xi), \quad \xi = (x - t)t^\beta \quad (4.39)$$

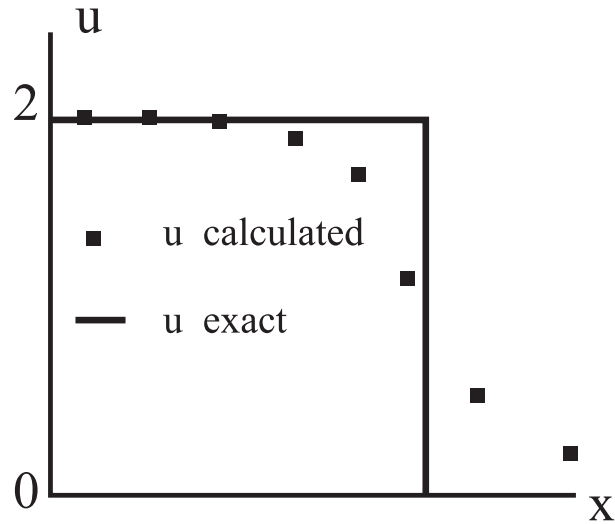


図 4.4: 1 次精度 Lax-Wendroff スキーム

ここで、(4.37) に対しては $\beta = -1/2$ 、(4.38) に対しては $\beta = -1/3$ である。式 (4.39) を式 (4.37) と式 (4.38) に代入すると、 $u(\xi)$ に対する方程式が得られる。

Lax-Friedrichs 方程式に対しては

$$\xi \frac{du}{d\xi} = -\frac{h^2}{\Delta t} (1 - \lambda^2) \frac{d^2u}{d\xi^2} \quad (4.40)$$

Lax-Wendroff 方程式に対しては

$$\xi \frac{du}{d\xi} = -\frac{h^2}{2} (1 - \lambda^2) \frac{d^2u}{d\xi^2} \quad (4.41)$$

最初の方程式は以下の単調関数で表される。

$$u(\xi) = C_1 + C_2 \int_{-\infty}^{\xi} \exp \left\{ -\frac{\Delta t}{2h^2(1-\lambda^2)} \xi^2 \right\} d\xi \quad (4.42)$$

この結果が第 5 図に示されている。一方、2 番目の解は、微分 $du/d\xi$ に関するいわゆる Airy 方程式である。その解は、 $\xi < 0$ では非単調で振動し、 $\xi > 0$ では単調となる Airy 関数によって記述される。その解の典型的な形は第 6 図に示されている。

それゆえ、2 次精度を得るために、2 階微分を含む項をキャンセルすると、一つのスキームが得られる。その FDA 方程式は非単調解を生じる。それが 2 次精度のスキームにおいて非物理的な振動解が生じる原因である。数値解の振動を取り除くために、2 階微分の項が FDA 方程式のなかに現われるように数値流束を補正する必要がある。この考え方は最初に Von Neumann and Richtmyer により導入された。これは今では人工粘性のあるいは人工散逸の概念として知られている。

ある種の振動を取るために数値流束は 2 階微分を模擬する項、あるいはある種の粘性を付け加えられるべきであるということが Von Neumann and Richtmyer によって提案された。一般的にはこの補正は、Lax と Wendroff の式に従うと、以下のように書かれる。

$$F_{i+1/2} = F_{i+1/2}^{LW} - D(u_i, u_{i+1})(u_{i+1} - u_i) \quad (4.43)$$

ここで、 $F_{i+1/2}^{LW}$ を Lax と Wendroff の数値流速である。

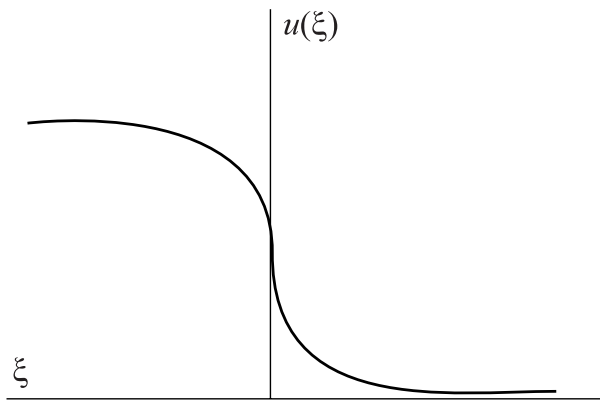


図 4.5: Lax-Friedrichs スキームに対する FDA 方程式の解

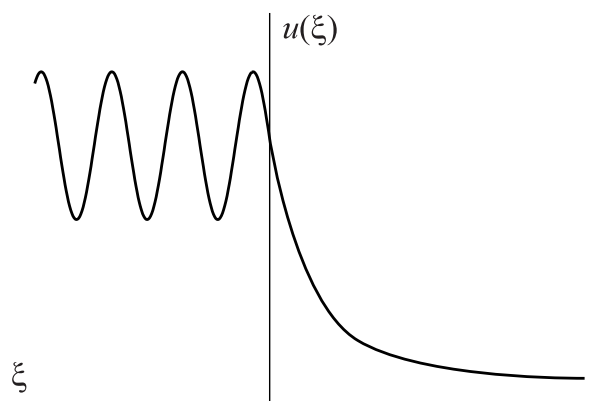


図 4.6: Lax-Wendroff スキームに対する FDA 方程式の解

オイラーの連立方程式に対しては、関数 hD は粘性の次元を持っている。それがこの付加項が人工散逸と呼ばれる理由である。このとき D は人工粘性である。2次精度を維持して、安定化への影響を保持するために、人工粘性は次の2つの特徴を持つ必要がある。

- 1) それは正の関数である。
- 2) それは、 $(u_{i+1} - u_i)$ とともに少なくとも線形にゼロになる。

通常、 D は差 $(u_{i+1} - u_i)$ に関して正の関数と考えて良い。オイラー方程式に対して開発された Von Neumann と Richtmyer の最初の方法では、人工散逸は運動量とエネルギーの方程式のみに以下のように追加された。

$$D_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) = \alpha \rho_{i+1/2}(0, 1, u_{i+1/2})^t |u_{i+1} - u_i| (u_{i+1} - u_i) \quad (4.44)$$

ここで、係数は $\alpha = O(1)$ で、その値は経験的に決定する必要がある。

人工散逸の他の形は Jameson によって提案された。それは式 (4.43) から分かるように、人工散逸を持つすべての2次精度の空間中心スキームは、以下のように数値流束を書くことにより共通的な形として表される。

$$F_{i+1/2} = f_{i+1/2} - d_{i+1/2}, \quad f_{i+1/2} = 0.5(f_{i+1} + f_i) \quad (4.45)$$

ここで、 $d_{i+1/2}$ は対称流束の近似を安定化する数値散逸である。Jameson らに従って、数値散逸は2階と4階の微分の近似に対する線形な組合せとして導入される。それは FDA 方程式において以下の形になる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = hr \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_4 h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad (4.46)$$

ここで、 $r = r(A)$ はヤコビアン行列 $A = \partial f / \partial u$ のスペクトル半径である。また、 $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ は解の空間勾配 (微分) の関数で、2階微分が不連続付近で on となる。他方、4階微分は衝撃波から遠く離れたところでは、本来の散逸を保障するように構成される。

離散化 (4.46) は、流束 (4.45) において以下のような数値散逸を持つようになる。

$$d_{i+1/2} = \varepsilon_{2,i+1/2}(u_{i+1} - u_i) - \varepsilon_{4,i+1/2}(u_{i+2} - 3u_{i+1} + 3u_i - u_{i-1}) \quad (4.47)$$

パラメータ $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ の制御は、上で述べられたことにしたがって以下のように評価される。

$$\varepsilon_{2,i+1/2} = 0.5(\varepsilon_{2,i} + \varepsilon_{2,i+1}), \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_{2,i} = k_2 \frac{|p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}|}{p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}} \quad (4.49)$$

$$\varepsilon_{4,i+1/2} = \max[0, k_4 - \varepsilon_{2,i+1/2}] \quad (4.50)$$

ここで、定数 k_2, k_4 の典型的な値は $k_2 \approx 0.25, k_4 \approx 2^{-8}$ である。上式から、散逸は、圧力勾配が大きくなる、つまり、 ε_2 がたいへん大きくなる衝撃波のところでは on になることが分かる。

4.5 陰的な空間中心法 (Beam-Warming 法)

以下のように書かれた対称的に評価された数値流束を持つ半離散化方程式は線形2段階 (3つの時間レベル) 法により時間的に離散化される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{h}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}), \quad F_{i+1/2} = 0.5(f_i + f_{i+1}), \quad f_i = f(u_i) \quad (4.51)$$

これは第3章で述べられた方法(式(3.19), 式(3.24))で、Newtonの線形化によって解かれる。結果として、あるクラスの陰的スキームが誘導され、それは Beam-Warming 法として知られている。これらのスキームは以下の保存形で書かれる。

$$\Delta u_i = -\lambda(F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*) \quad (4.52)$$

ここで、数値流束は以下のように定義される。

$$F_{i+1/2}^* = 0.5(f_i + f_{i+1}) + 0.5\theta(A_i^n \Delta u_i + A_{i+1}^n \Delta u_{i+1}) \quad (4.53)$$

ここで、 $\Delta u_i = u_i^{n+1} - u_i^n$ である。また、 A_i^n はヤコビアン行列である。これは、 $\xi = \phi = 0$ である線形2段階(3つの時間レベル)法の特別の場合である。

スキーム(4.52), (4.53)のフーリエ解析によれば、スキームが安定であるためには、次の不等式が成立する必要があることを示している。

$$\frac{1 + r^2 \lambda^2 (1 - \theta)^2 \sin^2 \phi}{1 + r^2 \lambda^2 \theta^2 \sin^2 \phi} \leq 1 \quad \text{for } \forall \phi, \phi \in [1, \pi] \quad (4.54)$$

ここで、 $r = r(A)$ は行列 A の固有値である。ここでは、線形の場合、つまり、 $f = Au$ ($A = \text{const}$) が仮定されている。

問題26 安定条件式(4.54)を求めよ。

式(4.54)から、もし $\theta \geq 0.5$ であるならば、安定条件は満足されることが分かる。このことから、 $\theta \geq 0.5$ の条件の下では、Beam-Warming 法(4.52), (4.53)は空間および時間刻みのどんな値に対しても安定である。しかし、2次精度として、これらのスキームは、急激な変化を持つ不連続の存在する付近で生じる高周波の振動を減衰させるために、上で述べた人工粘性の項を付加する必要がある。

第5章 符号による風上化の基本概念

この性質を持つ一連のスキームは Courant-Isaacson-Rees スキームと呼ばれる。今までの章で考えて来た空間中心のスキームでは、その数値流束の形はヤコビアン行列の性質を考慮していない。この意味で、ヤコビアン行列の固有値の符号の変化に関して対称である。その一方で、固有値の符号は擾乱の伝播の方向を示し、その結果、与えられた点における解の影響領域を定義する。この意味において、格子点間の途中にある点における解の関数として与えられる数値流束は、固有値の符号に依存して近似することは自然である。言い換えれば、近似ステンシルは上流スキームが選ばなければならない。全ての上流スキームは Courant-Isaacson-Rees(CIR) スキームから発生していると考えられる。その元々の定式化では、スキームは線形スカラー方程式に対して誘導された。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} \quad (5.1)$$

これは陽的な 1 段階時間離散による保存形で離散化される。

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda (f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n), \quad f_{i+1/2}^n = au_{i+1/2}^n, \quad \lambda = \tau/h \quad (5.2)$$

先に示した、空間中心の対称数値流束の評価である $f_{i+1/2}^n = 0.5(f_i^n + f_{i+1}^n)$ は、無条件不安定スキームとなる。しかし、もし数値流束が以下のように、片側の非対称形で計算されるならば、

$$f_{i+1/2}^n = \begin{cases} f_i^n = au_i^n & \text{for } a \geq 0 \\ f_{i+1}^n = au_{i+1}^n & \text{for } a < 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

このスキーム (5.2) は以下の条件の元に安定になることが Courant らにより示された。

$$|a|\lambda \leq 1 \quad (5.4)$$

問題 27 方程式 (5.1) に対する、スキーム (5.2)、(5.3) は条件 (5.4) の下では安定であることを、1 つはフーリエ法を使うことにより、もうひとつは FDA の等価方程式を導くことにより、2 つの方法で証明せよ。

双曲型の方程式の数値方法において重要な役割を果たす (5.4) の型の安定条件式は Courant, Friedrichs, Lewy(CFL) 条件と呼ばれる。

式 (5.3) の型の数値流束の風上法の定義は係数 a の符号に依存する。言い換えれば、このスキームのステンシルは第 5.1 図に示すようにこの符号に依存する。

ここで、係数 a は、流束 $f = au$ ($a = df/du$ 、スカラーに対してはヤコビアンは 1×1 の行列に縮約する) のヤコビアンの固有値である。

数値流束 (5.3) の風上形は数学的に正当性を持っている。実際、微分方程式 (5.1) はその特性形において以下のように表される。

$$du = 0 \quad \text{along} \quad \frac{dx}{dt} = a \quad (5.5)$$

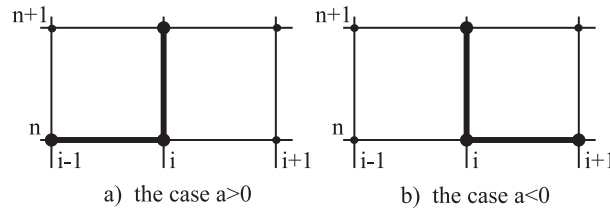


図 5.1: 風上離散化に対するステンシル

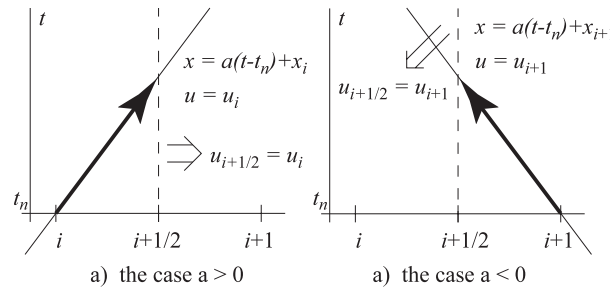


図 5.2: 風上流束評価の幾何学的解釈

これは次の代数的な関係になる。

$$u = u_0 \quad \text{along } x = at + x_0 \tag{5.6}$$

ここで、 u_0, x_0 は定数である。解は常に平面 (x, t) にある $x = at + x_0$ の線に沿って一定である。この事実によれば、数値流束はセル境界での値 $u_{i+1/2}$ を使った微分流束の値として評価される。それは、もし $a > 0$ ならば u_i に等しく、 $a < 0$ ならば u_{i+1} に等しい。(第 5.2 図参照)

は負となる。

数値流束 (5.3) の風上の定義は係数 a が正であっても負であってもどちらの場合でも適用できるように共通な形で書かれる。

$$f_{i+1/2}^n = f_i^+ + f_{i+1}^- \tag{5.7}$$

ここでは数値流束の正及び負の部分は以下のように定義される。

$$f_i^\pm = a^\pm u_i, \quad a^\pm = 0.5(a \pm |a|) \tag{5.8}$$

数値流束のこの形は風上近似の主な概念を反映している。それは、微分流束 f は先ず最初に正と負の部分に分割されることである。

$$f = f^+ + f^- \tag{5.9}$$

その後で、その数値流束は、考慮しているセルの左側から計算された正の部分と右側から計算された負の部分の和として計算される。

5.1 一定の係数を持つ連立方程式

式 (5.6) の形は大変興味深い。なぜなら、その風上化流束評価の考え方は非線形オイラーの連立方程式に一般化できるからである。そこへ行くまでの途中のステップとして、まず最初に一定の係

数を持つ連立方程式を考える。別の言い方をすれば、一定のヤコビアン行列を持つ方程式の系を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, f = Au, A = \text{const} \quad (5.10)$$

ここで、行列 A が固有ベクトルの基底を持つものとする。このことから、この A は

$$A = R\Lambda R^{-1} \quad (5.11)$$

のように対角化できる（第2章参照）。ここで、 R は右固有ベクトルの行列である。そして、 Λ は固有値からなる対角行列である。このようにして、式 (5.10) は特性形で書かれる。

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (5.12)$$

ここで、 w は特性変数のベクトルで、 $w = (w_k) = R^{-1}u$ である。式 (5.12) はスカラー変数の、お互いに独立した方程式である。このことから、その各成分の方程式はそれぞれ独立に風上法を使って離散化される。結果として得られる離散方程式は

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} &= w_i^n - \lambda(g_{i+1/2} - g_{i-1/2}), \\ g_{i+1/2} &= g_i^+ + g_{i+1}^-, \\ g_i^\pm &= \Lambda^\pm w_i \end{aligned} \quad (5.13)$$

ここで、 Λ^\pm は正と負の行列で、以下のように定義される。

$$\Lambda^\pm = \begin{bmatrix} 0.5(\lambda_1 \pm |\lambda_1|) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0.5(\lambda_2 \pm |\lambda_2|) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0.5(\lambda_n \pm |\lambda_n|) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

ここで、 λ は

$$\lambda = \lambda^+ + \lambda^- \quad (5.15)$$

である。

式 (5.13) の中の特性変数を元々の変数の u に変換すると、式 (5.10) の離散形を得る。それは風上型で以下のように表される。

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \lambda(f_{i+1/2} - f_{i-1/2}), \\ f_{i+1/2} &= f_i^+ + f_{i+1}^-, \\ f_i^\pm &= R\Lambda^\pm R^{-1}w_i \end{aligned} \quad (5.16)$$

問題 2 8 式 (5.16) の形における一定ヤコビアン行列を持つ連立方程式に対する風上離散式を導け。

式 (5.16) から、一定値のヤコビアン行列を持つベクトル流束の分割は、正及び負の行列におけるヤコビアン分割と一致する。

$$A = A^+ + A^-, A^\pm = R\Lambda^\pm R^{-1} \quad (5.17)$$

ここで、ヤコビアンはスカラー方程式における係数と同じ役割を果たす。スカラー方程式に対しては式 (5.6) の形で簡単であったものが、ベクトルの流束式 (5.16) に対する分割の手順は少し複雑になる。

フーリエ法を式 (5.16) に適用すると、安定条件は以下のように導かれる。

$$\lambda \rho_A \leq 1 \quad (5.18)$$

ここで、 ρ_A は行列 A のスペクトル半径を表す。条件 (5.18) はスカラー方程式に対して導入された CFL 条件 (5.4) の一般形として考えても良い。

問題 2 9 安定条件 (5.18) を誘導せよ。

5.2 オイラー方程式に対する流束ベクトル分割

ここでは、Steger and Warming の流束ベクトル分割法を考える。流束ベクトル分割は風上の数値スキームを構成する上で重要であるので、オイラー方程式に対してこの手法を考える。この場合には、微分流束は保存パラメータの線形関数ではない。しかし、それは次元 1 の均質関数であるというすばらしい性質を持っている。つまり、任意の定数 a に対して

$$f(au) = au \quad (5.19)$$

である。その結果、流束は線形方程式 (5.10) の場合に対する流束の形と同様な形で表される。

$$f = Au \quad (5.20)$$

ここで A はヤコビアン行列である (第2章参照)。オイラー方程式に対する流束のヤコビアンは固有値の基底を持っているので (第2章参照) 対角化できる。つまり、対角行列 Λ で表される。

$$A = L\Lambda L^{-1} \quad (5.21)$$

ここで、 L は左固有ベクトルの行列である。 Λ の成分はヤコビアン A の固有値である。それは具体的に以下のようなものである。

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = v_1, \lambda_4 = v_1 + a, \lambda_5 = v_1 - a \quad (5.22)$$

A と L の具体的な成分は第2章に書かれている。

Steger と Warming は、先に示した一定値のヤコビアン行列の場合と同様に、オイラーの微分流束を正の部分と負の部分に分割するために、その流束の均一性の性質を使うことを提案した。正の行列と負の行列の和の形で対角行列を表すと、

$$\Lambda = \Lambda_+ + \Lambda_- \quad (5.23)$$

ここでは、 Λ^+ のすべての対角成分は正であり、 Λ^- のすべての対角成分は負である。これにより、以下の行列が定義できる。

$$A^+ = L\lambda_+L^{-1}, L\lambda_-L^{-1}, A = A^+ + A^- \quad (5.24)$$

また、流束は

$$f^+ = A^+u, f^- = A^-u, \quad (5.25)$$

となる。これらは、それぞれ正と負の流束と呼ばれる。実際、

$$f = f^+ + f^- \quad (5.26)$$

である。この手順は流束ベクトル分割と呼ばれる。

ここで重要なことは、式(5.23)の分割が唯一ではないということである。その最も簡単な形は Steger と Warming によって提案された。その対角成分は以下のように表される。

$$\Lambda^\pm = (\lambda_{kk}^\pm), \quad \lambda_{kk}^\pm = 0.5(\lambda_k \pm |\lambda_k|) \quad (5.27)$$

ここで、 $\lambda_k (k=1, \dots, 5)$ はヤコビアン固有値である。オイラーの流束に対して、式(5.27)を書き下すと

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^\pm &= \lambda_{22}^\pm = \lambda_{33}^\pm = 0.5(v_1 \pm |v_1|), \\ \Lambda_{44}^\pm &= 0.5(v_1 + a \pm |v_1 + a|), \\ \Lambda_{55}^\pm &= 0.5(v_1 - a \pm |v_1 - a|) \end{aligned} \quad (5.28)$$

ここで、 a は音速である。

問題30 式(5.28)とは別のヤコビアン分割の例を挙げなさい。

式(5.28)の形で正と負の行列を定義すると、流束の正と負の部分を導くことができる。例えば、 $v_1 > 0$ の場合を考えよう ($v_1 < 0$ の場合は類推から同様にして処理できる)。もし、 $v_1 > a$ であれば、つまり、超音速流であれば、

$$\Lambda^+ = \Lambda, \quad \Lambda^- = 0 \quad (5.29)$$

その結果、流束は

$$f^+ = f, \quad f^- = 0 \quad (5.30)$$

となる。もし、 $v_1 < a$ であれば、

$$\Lambda^+ = \text{diag}(v_1, v_1, v_1, v_1 + a, 0), \quad \Lambda^- = \text{diag}(0, 0, 0, 0, v_1 - a) \quad (5.31)$$

ヤコビアン A^+ および A^- は第2章で与えられたヤコビアン A の左固有ベクトル行列 L から以下のように導かれる。

$$A^\pm = L\Lambda^\pm L^{-1} \quad (5.32)$$

ここで、流束 f^+ および f^- は

$$f^\pm = A^\pm u \quad (5.33)$$

である。

式(5.32)(5.33)の演算を簡略化するために、Steger と Warming は以下に定義される一般化された流束ベクトルを導入した。

$$\tilde{f} = L\tilde{\Lambda}L^{-1} \quad (5.34)$$

ここで、 $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\lambda}_{kk})$ であり、対角成分 $\tilde{\lambda}_{kk} = \tilde{\lambda}_k (k=1, \dots, 5)$ を持つ任意の対角行列である。そして任意 $\tilde{\lambda}_k$ に対して、 $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3$ である。正確に言うと、これはオイラー方程式に対して実現可能である。一般化された流束は次のような簡単な形を持つ。

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \frac{\rho}{2\gamma} (\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}v_1 + a(\tilde{\lambda}_4 - \tilde{\lambda}_5), \tilde{\lambda}v_2, \tilde{\lambda}v_3, \\ &0.5\tilde{\lambda}v^2 + av_1(\tilde{\lambda}_4 - \tilde{\lambda}_5) + a^2(\tilde{\lambda}_4 + \tilde{\lambda}_5)/\tilde{\gamma})^t \end{aligned} \quad (5.35)$$

ここで、 $\tilde{\lambda} = 2\tilde{\gamma}\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_4 + \tilde{\lambda}_5$ である。式(5.34)(5.35)で使用されている記号については第2章を参照されたい。

問題3 1 式 (5.35) を直接計算して求めなさい。

式 (5.35) を使うと、流束 f^+ と f^- が容易に書き下すことができる。

$$\begin{aligned} f^+ &= \tilde{f}(\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3 = v_1, \tilde{\lambda}_4 = v_1 + a, \tilde{\lambda}_5 = 0) \\ &= (\rho/2\gamma)(\tilde{\lambda}, v_1(\tilde{\lambda} + a) + a^2, \tilde{\lambda}v_2, \tilde{\lambda}v_3, 0.5\tilde{\lambda}v^2 + (v_1 + a)(av_1 + a^2/\tilde{\gamma}))^t \end{aligned} \quad (5.36)$$

ここで、 $\tilde{\lambda} = v_1(2\tilde{\gamma} + 1) + a$ である。また、

$$\begin{aligned} f^- &= \tilde{f}(\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3 = 0, \tilde{\lambda}_4 = 0, \tilde{\lambda}_5 = v_1 - a) \\ &= (\rho/2\gamma)(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}^2, \tilde{\lambda}v_2, \tilde{\lambda}v_3, 0.5\tilde{\lambda}v^2 - a\tilde{\lambda}(v_1 - a/\tilde{\gamma}))^t \end{aligned} \quad (5.37)$$

ここで、 $\tilde{\lambda} = v_1 - a$ である。

問題3 2 $v_1 < 0$ に対する流束 f^+ と f^- を求めなさい。

注意1 ここで考えられている流束ベクトル分割は本質的に以下の事実に依存する。オイラー方程式の微分流束 f は解ベクトル u において1次の均質関数である。それゆえ、この方法を非均質な一般関数に直接には適用できない。

注意2: 流束ベクトル分割の非可換性 ここで考えている流束ベクトル分割は以下の関係を持つ。

$$A = A^+ + A^-, \quad f = Au = f^+ + f^- = A^+u + A^-u \quad (5.38)$$

その結果、

$$\frac{\partial f}{\partial u} = A = A^+ + A^- = \frac{\partial(f^+ + f^-)}{\partial u} = \frac{\partial f^+}{\partial u} + \frac{\partial f^-}{\partial u} \quad (5.39)$$

しかし、ここで注意することは、これらはヤコビアンとは何ら等価ではないことである。つまり、

$$A^+ \neq \frac{\partial f^+}{\partial u}, \quad A^- \neq \frac{\partial f^-}{\partial u} \quad (5.40)$$

問題3 3 直接計算から不等式 (5.40) を証明せよ。

注意3: 右固有ベクトルに関する流束ベクトル分割 流束ベクトル分割法は、解ベクトルの右固有ベクトルの基底による分解であると解釈される。実際、右固有ベクトル $r_k (k = 1, \dots, 5)$ は $5D$ の空間の基底を形成し、解ベクトル u を含む任意のベクトルは右固有ベクトルの線形な組み合わせとして表せる。

$$u = \sum_{k=1}^5 \alpha_k r_k \quad (5.41)$$

固有ベクトルは以下の定義を見れば分かるように、一つの比例定数が未定のままで表される。

$$Ar_k = \lambda_k r_k \quad (5.42)$$

従って、それらを式 (5.41) の係数 α_k が1になるように選ぶことが可能である。この場合、式 (5.41) の分解は以下の形を取る。

$$u = \sum_{k=1}^5 r_k \quad (5.43)$$

均一性の性質から、オイラーの流束は以下のように基底で分解される。

$$f = Au = \sum_{k=1}^5 Ar_k \quad (5.44)$$

r_k は固有値 λ_k と関連したヤコビアン固有ベクトルであることを考慮すると、式 (5.44) を以下のように書き換えることが出来る。

$$f = \sum_{k=1}^5 \lambda_k r_k \quad (5.45)$$

分割された流束は以下のように定義される。

$$f = \sum_{k=1}^5 (\lambda_k^+ + \lambda_k^-) r_k = f^+ + f^- \quad (5.46)$$

ここで、

$$f^+ = \sum_{k=1}^5 \lambda_k^+ r_k, \quad f^- = \sum_{k=1}^5 \lambda_k^- r_k \quad (5.47)$$

同様にして、式 (5.34) で導入された、一般化された流束 \tilde{f} は右辺ベクトルを基底として分解される。

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^5 \tilde{\lambda}_k r_k \quad (5.48)$$

問題 3 4 式 (5.43) の分解となる右固有ベクトルに対する陽的な表現式を求めよ。そして、式 (5.47) が式 (5.36) および式 (5.37) と同一であること、また、式 (5.48) が式 (5.35) と同一であることを確認しなさい。

5.3 van Leer の流束分割

Steger と Warming の流束ベクトル分割は以下に示すように欠点を持っている。つまり、それは、分割された流束がヤコビアンの固有値がゼロになるところで弱い不連続を生じることである。例えば、以下の形を持つ流束の最初の成分が $v_1 = a$, $v_1 = -a$, $v_1 = 0$ で微分不可能になる。

$$f_1^+ = \begin{cases} f_1, & \text{for } v_1 > a \\ \frac{\rho}{2\gamma}[v_1(2\tilde{\gamma}+1)+a], & \text{for } 0 \leq v_1 \leq a \\ \frac{\rho}{2\gamma}(v_1+a), & \text{for } -a \leq v_1 \leq 0 \\ 0, & \text{for } v_1 < -a \end{cases} \quad (5.49)$$

$$f_1^- = \begin{cases} 0, & \text{for } v_1 > a \\ \frac{\rho}{2\gamma}(v_1-a), & \text{for } 0 \leq v_1 \leq a \\ \frac{\rho}{2\gamma}[v_1(2\tilde{\gamma}+1)-a](v_1+a), & \text{for } -a \leq v_1 \leq 0 \\ f_1, & \text{for } v_1 < -a \end{cases} \quad (5.50)$$

その結果、ヤコビアンの成分はこれらの点で不連続となる。今までの多くの数値実験により音速点で非物理的な解が生じること示している。

Steger と Warming 法が持つこの欠点を克服するために、Van Leer は別の流束ベクトル分割を導入した。それは流束の均質性は要求しないという長所を持つ。それは、固有値の符号が混在するとき

にのみ起こる。つまり、 $|v_1| < a$ あるいは、 $|M| < 1$ であり、ここで、 M はマッハ数で、 $M = v_1/a$ である。

この方法の主な考え方は、Steger と Warming の分割を以下のように補正することである。つまり、分割された流束とそのヤコビアンがマッハ数の連続関数で、しかも、 M の最低次の多項式として近似されることである。Van Leer の方法では成分毎に分割する。 f の第一成分の分割は以下のように行う。

$$f_1 = \rho v_1 = \rho a M = 0.25 \rho a (M+1)^2 - 0.25 \rho a (M-1)^2 \quad (5.51)$$

これは以下のように分割される。

$$f_1 = f_1^+ + f_1^-, \quad f_1^\pm = \pm 0.25 \rho a (M \pm 1)^2 \quad (5.52)$$

2 番目 (つまり、 x_1 成分の運動量流束) 以外の他の成分は、質量流束 f_1 に関して以下のように表される。

$$f_3 = f_1 v_2, \quad f_4 = f_1 v_3, \quad f_5 = f_1 H_t \quad (5.53)$$

これらは質量流束の分割に基づいて以下のように分割される。

$$f_3^\pm = f_1^\pm v_2, \quad f_4^\pm = f_1^\pm v_3, \quad f_5^\pm = f_1^\pm H_t \quad (5.54)$$

2 番目の成分は以下のように分割する。

$$f_2 = f_1 u + p \quad (5.55)$$

この右辺第 1 項に対しては上で述べた分割を使用できる。一方、圧力の項は独立した分割が必要となる。Van Leer によれば、圧力は以下のように書かれる。

$$p = p[\alpha_+(M) + \alpha_-(M)] \quad (5.56)$$

ここで、関数 $\alpha_\pm(M)$ は次の特性を満たすように選択される。

1. M の最低次の多項式
2. $\alpha_+(M) > 0$, $\alpha_+(M) + \alpha_-(M) \equiv 1$, $\forall M: |M| \leq 1$
3. $\alpha_+(-1) = 0$, $\alpha_+(1) = 1$, $\alpha'_+(-1) = \alpha'_+(1) = 0$

ここで、プライムは M に関する微分を表す。これらの性質を満たす関数は以下のものである。

$$\alpha_+(M) = 0.25(1+M)^2(2-M), \quad \alpha_-(M) = 0.25(1-M)^2(2+M) \quad (5.57)$$

以上より、流束の 2 番目の成分は、次のように分割される。

$$f_2 = f_2^+ + f_2^-, \quad f_2^\pm = f_1^\pm v_1 + p^\pm, \quad p^\pm = 0.25 p (1 \pm M)^2 (2 \pm M) \quad (5.58)$$

式 (5.52) から式 (5.58) までに示された、Van Leer による分割流束の成分は、音速点および激み点で勾配が連続となる。そして、それらの点で数値計算結果はおかしな挙動を生じないことは今まで多くの数値実験で確かめられてきた。

問題 3 5 Van Leer の流束ベクトル分割法に対応する固有値の分割を導け。そして、それが風上の条件 (5.23) と同じになっていること示せ。すなわち、以下のように定義された対角行列 Λ^+ の対角成分は正となり、

$$f^+ = A^+ u = \Lambda \Lambda^+ L^{-1} u \quad (5.59)$$

以下のように定義された対角行列 Λ^- の対角成分は負となることを示せ。

$$f^- = A^- u = \Lambda \Lambda^- L^{-1} u \quad (5.60)$$

第6章 流束ベクトル分割

ここでは風上型の一つの方法である流束ベクトル分割 (FVS, Flux Vector Splitting) について勉強する。

6.1 1次精度陽解法風上スキーム

ヤコビアン行列の固有値の符号、つまり、それが正か負かに基づいて流束ベクトルを2つの部分に分割することにより、保存形での一般的な風上スキームが構築できる。ここでは、以下の保存形で書かれた1次元オイラーの方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

ここで、解ベクトル u と流束ベクトル f は以前定義されている (第2章の式(2.2)と式(2.3)を参照)。

有限体積法により方程式を離散化し、陽的な時間積分を行なうと、以下の方程式が得られる。

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -\lambda(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n) \quad (6.2)$$

ここで、 $\lambda = \Delta t/h$ である。また、 Δt は時間刻み、 h は空間刻みである。

流束分割を考慮すると、風上スキームの基本概念は数値流束 $f_{i+1/2}^n$ を微分流束の正の部分と負の部分の和として近似することである。そこでは、正のものは格子点 i での値、つまり、左側にある計算セルからの値を用い、負のものは格子点 $i+1$ 、つまり、右側のセルの値を用いる。

$$f_{i+1/2}^n = f_i^+ + f_{i+1}^- \quad (6.3)$$

ここで、右辺の量の時間レベル n は省略されている。風上の流束近似の概念は図式的に第6.1図に示されている。

式(6.3)を式(6.2)に代入すると、陽的な風上スキームは以下の形で書かれる。

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -\lambda [(f_i^+ - f_{i-1}^+) + (f_{i+1}^- - f_i^-)] \quad (6.4)$$

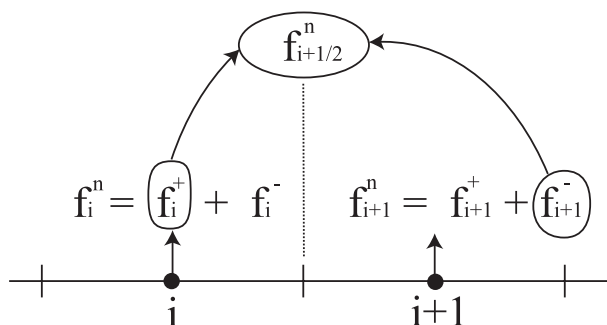


図 6.1: 風上流束近似

ここで、流束内に存在する空間微分は、正の部分に対しては後退差分で、負の部分に対しては前進差分で計算される。

6.2 安定条件

スキーム(6.4)は速度ベクトル u に関して非線形である。そのため、局所的な線形化がこのスキームの安定条件を調べるために行なわれる。線形化は格子点 i で評価されたヤコビアン f_u^+ と f_u^- に関して以下ようになる。

$$f_{i-1}^+ = f_i^+ - f_u^+(u_i^n - u_{i-1}^n) + \dots \quad (6.5)$$

$$f_{i+1}^- = f_i^- + f_u^-(u_{i+1}^n - u_i^n) + \dots \quad (6.6)$$

式(6.5)と式(6.6)を式(6.4)に代入すると、線形化されたスキームが得られる。

$$u_i^{n+1} - u_i^n = -\lambda f_u^+(u_i^n - u_{i-1}^n) - \lambda f_u^-(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (6.7)$$

安定条件を得るために、この式に対してフーリエ法が適用される。ここで、ヤコビアン f_u^+ と f_u^- は格子点 i で凍結されていると考える。つまり、一定であるとする。フーリエ法に従えば、式(6.7)のゼロでない解を一つの調和関数の形で求める。

$$u_k^n = v r^n \exp(ik\phi), \quad v \neq 0 \quad (6.8)$$

ここで、 r と ϕ は一定値である。また、 i は、虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である。式(6.8)を式(6.7)に代入すると、調和関数の振幅 v に対する方程式が得られる。

$$[(r-1)I + \lambda(1 - \cos\phi)(f_u^+ - f_u^-) + i\lambda \sin\phi(f_u^+ + f_u^-)]v = 0 \quad (6.9)$$

式(6.9)のゼロでない解が存在する条件は、その行列式が0でないことである。式(6.7)の解は r が行列 G の固有値であるときのみ、式(6.8)の形で存在する。

$$G = I - \lambda(1 - \cos\phi)|f_u| - i\lambda A \sin\phi \quad (6.10)$$

ここで、

$$|f_u| = f_u^+ - f_u^- \quad (6.11)$$

$$f_u^+ + f_u^- = (f^+ + f^-)_u = f_u = A \quad (6.12)$$

これは、流束のヤコビアン行列に等しい。

安定性に対する十分条件は

$$|r| \leq 1 \quad (6.13)$$

である。 r は行列 G の固有値であるので、 G のすべての固有値 (*modulus*) は1以下でなければならない。つまり、スキームが安定であるためには、行列 G のスペクトル半径 ρ_G は1以下でなければならない。

$$\rho_G \leq 1 \quad (6.14)$$

不等式(6.14)は、 λ に、あるいは、 $\lambda = \Delta t/h$ であるので時間刻み Δt に制限をもたらす。この制限を陽的に書き下すのは困難である。それは、ヤコビアン A と $|f_u|$ が異なる行列で対角化されるからである。しかし、この形での評価は次のようにしてなされる。

まず、最初に G をヤコビアン A の左固有ベクトル行列で変換する。

$$\bar{G} = LGL^{-1} = 1 - \lambda(1 - \cos\phi)|E| - i\lambda\Lambda \sin\phi \quad (6.15)$$

ここで、 Λ は A の固有値の対角行列である。そして、

$$|E| = L|f_u|L^{-1} \quad (6.16)$$

である。また、 G と \bar{G} は同じ一組の固有値を持ち、かつ、

$$\rho_G = \rho_{\bar{G}} \quad (6.17)$$

である。

\bar{G} の固有値は高周波数側の限界である $\phi = \pi$ で最大値に達する。そこでは、式 (6.15) の最後の項はゼロになる。このことから、 \bar{G} のスペクトル半径は、

$$\rho_{\bar{G}} = |1 - \lambda(1 - \cos\phi)\rho_{|E|}| \quad (6.18)$$

である。式 (6.14) の安定条件は以下ようになる。

$$\lambda\rho_{|E|} \leq 1 \quad (6.19)$$

この条件は、CFL の不等式と似ているが、CFL 条件とは対照的なところがある。つまり、安定限界がヤコビアンのスペクトル半径ではなく、行列 $|E|$ のスペクトル半径の逆数で決定される。このことは多くの数値実験により確かめられている。例えば、初期圧力比 2.8 で均一な温度場を持つ衝撃波管の計算が、陽的な Steger-Warming 法による流束スキームで計算された。安定限界は $CFL \leq 0.858$ である。このとき、CFL は $\lambda\rho_A$ と見なされる。もし、時間刻みを $CFL > 0.858$ ととると、数値解に高周波の振動が現われる。これらの振動は CFL が大きくなるにつれて増大する。

6.3 AUSM スキーム

ここでは、AUSM (Advection Upwind Splitting Method) スキームを考える。上で述べられた FVS 風上スキームは重大な欠点がある。それは、接触面のところで大きな散逸が存在するということである。この結果、FVS スキームで計算された接触不連続は時間とともに連続的に周りに広がっていく傾向を示す。

この現象を理解するために、初期に格子点 i と $i+1$ に接触面がある場合を FVS 風上スキームで計算することを考える。

$$(v_1)_k = (v_2)_k = (v_3)_k = 0, \quad p_k = p \quad \forall k \quad (6.20)$$

$$\rho_k = \rho_1 \quad \text{for } k \leq i, \quad \rho_k = \rho_2 \quad \text{for } k \geq i+1, \quad \rho_1 \neq \rho_2 \quad (6.21)$$

物理的な観点からみて、ここで考えている分布は静止した接触面に相当する。つまり、時間とともに移動しない。しかし、第 1 ステップで、FVS スキームは i 点と $i+1$ 点との間で質量流束を生じる。具体的には以下ようになる。(式 (5.49) から式 (5.51) を参照)

- Steger-Warming の分割では

$$(f_1)_{i+1/2} = \frac{1}{2\gamma}(\rho_1 a_1 - \rho_2 a_2) \quad (6.22)$$

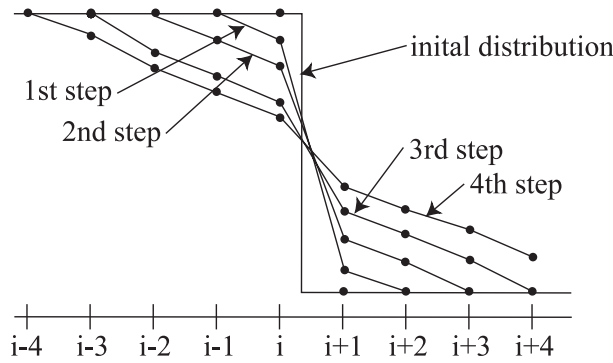


図 6.2: 有限体積法による静止した不連続面の計算結果

- Van Leer の分割では

$$(f_1)_{i+1/2} = 0.25(\rho_1 a_1 - \rho_2 a_2) \quad (6.23)$$

他の格子点での質量流束はゼロになる。このことから、FVS スキームで 1 ステップ進めると、格子点 i では密度が減少し、 $(i+1)$ の格子点では $\lambda(f_1)_{i+1/2}$ だけ増加する。ここでは、 $\rho_1 > \rho_2$ 、すなわち、 $(f_1)_{i+1/2} > 0$ が仮定されている。同様な理由で、第 2 ステップでは、格子点 $i-1$ および $i+1$ で、この拡散現象が生じる。このようにして、時間ステップを進めるごとに一つずつ外側に広がっていく (第 fig:n6-2 図参照)。

FVS に基づいた風上スキームは接触不連続を認識するのが困難であるので、粘性流の計算には適さない。その結果、境界層やせん断層の粘性領域では大きな誤差が現われる。これらは、格子幅を小さくしたり、高次精度にしても修正できない。

この対策として、リーマン問題の解を利用した、風上スキームが考えられる。それはゴドノフ型スキームと呼ばれている。このスキームでは静止した不連続面に対して散逸は生じない。つまり、解が鈍る事無く、その後もシャープなまま存続する。

しかし、ここでは、まず最初に、ゴドノフ型ではない方法を考える。この方法は静止した不連続面に対して同様に数値粘性が生じない。それは AUSM と呼ばれ、1990 年に Liou と Steffen によって導入された。この方法は、厳密には FVS 型のスキームではない。なぜなら、その流束は式 (6.3) の形では表されない。にもかかわらず、その定式化は FVS と同じ性質を持っている。

オイラー方程式に対する数値流束は、以下のように 2 つの項の和として表される。

$$f = v_1 z + p \quad (6.24)$$

$$z = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, H)^t \quad (6.25)$$

$$p = (0, p, 0, 0, 0)^t \quad (6.26)$$

ここで、式 (6.24) の右辺第 1 項はベクトル z が速度 v_1 で単に運ばれると解釈できる。2 番目の項は圧力と関係している。AUSM の主な概念は対流項と圧力項を別々に扱うことである。すなわち、格子点 i と $i+1$ の間で数値流速を考えると、対流の部分は適当な途中での速度 $v_{1,i+1/2}$ を選ぶことによって風上の方法で近似される。

$$(v_1 z)_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left[\left\{ v_{1,i+1/2} + |v_{1,i+1/2}| \right\} z_i + \left\{ v_{1,i+1/2} - |v_{1,i+1/2}| \right\} z_{i+1} \right] \quad (6.27)$$

圧力項は、圧力の適当な中間の値 $p_{i+1/2}$ を選ぶことによって近似される。

$$p_{i+1/2} = (0, p_{i+1/2}, 0, 0, 0)^t \quad (6.28)$$

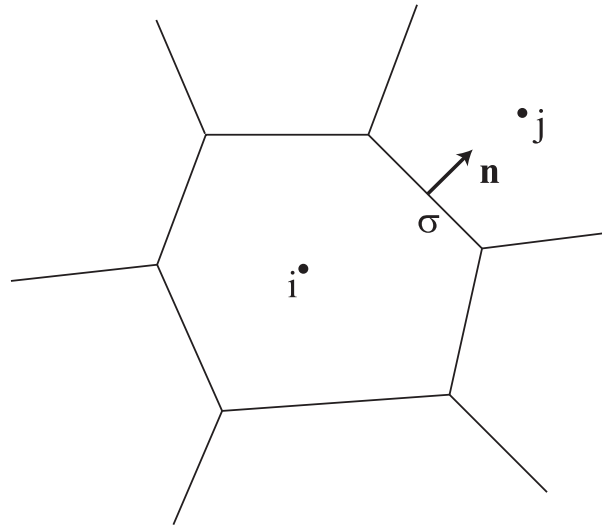


図 6.3: セルのインターフェイス

このようにして、AUSM スキームは、2つのパラメータ、つまり、速度と圧力の中間値 $v_{1,i+1/2}$ と $p_{i+1/2}$ によって定義される。

Liou と Steffen によって提案され、数値実験によってテストされた一つの可能性は van Leer の分割を使ってこれらのパラメータを評価する事である。

$$v_{1,i+1/2} = v_{1,i}^+ + v_{1,i+1}^- \quad (6.29)$$

$$p_{i+1/2} = p_i^+ + p_{i+1}^- \quad (6.30)$$

ここで、分割された部分は以下の通りである。

$$v_1^\pm = \begin{cases} \pm 0.25Ma(M \pm 1)^2 & \text{for } |M| \leq 1 \\ 0.5a(M \pm |M|) & \text{for } |M| > 1 \end{cases} \quad (6.31)$$

$$p^\pm = \begin{cases} 0.25p(1 \pm M)^2(2 \mp M) & \text{for } |M| \leq 1 \\ 0.5p(M \pm |M|)/M & \text{for } |M| > 1 \end{cases} \quad (6.32)$$

ここで、 $M = v_1/a$ はマッハ数で、 a は音速である。

問題 AUSM 法が静止した不連続で何ら数値散逸を生じないことを示せ。

6.4 多次元方程式への拡張

ここで、多次元のオイラー方程式を FVM を使って時間的に陽的に離散化することを考える。格子は構造格子でも、非構造格子でもかまわない。このようにして得られた離散方程式の一般形はセル境界 σ において局所的な 1 次元流束である F_σ に関して書くことができる。(第 3 章参照)

$$u_k^{n+1} - u_k^n = -\Delta t \sum_{\sigma} s_{\sigma} T_{\sigma}^{-1} F_{\sigma} \quad (6.33)$$

ここで、 T_{σ} は変換行列、 u は解ベクトル、 s_{σ} はセル境界 σ での縁の長さ (2 次元の場合) あるいは縁の面積 (3 次元の場合) を表す。(第 6.4 図参照)

局所的な1次元流束 F_σ は、1次元オイラー方程式に対する微分流速として扱うことができる。それにはセル境界 σ と関連した局所基底を利用する。そこでの空間座標は外側の単位法線ベクトル n に沿って定義される。

$$\frac{\partial U_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial F_\sigma}{\partial n} = 0 \quad (6.34)$$

ここで、 u, v, w は基底座標における速度ベクトル成分である。このことから、流束 F_σ を近似するために、1次元方程式に対して、上で導かれた風上数値流束の評価に対する定式をそのまま適用できる。

例えば、 σ を第2図で示した i 点と j 点との間のセル境界であるとする。そのとき、セル境界 σ に関するベクトル U と F を導入すると、

$$U_k = T_\sigma u_k = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e_t)_k^t \quad (6.35)$$

$$F_k = F_\sigma(U_k) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho v u, \rho w u, H_t)_k^t \quad (6.36)$$

となる。

式(6.33)の流束 F_σ は次のように近似される。

- FVS 型のスキームでは

$$F_\sigma = F_i^+ + F_j^- \quad (6.37)$$

ここでは、分割された正と負の部分は Steger と Warming の方法で以下のように定義される。

$$F = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} \lambda^\pm \\ \lambda^\pm u + a(\lambda_4^\pm - \lambda_5^\pm) \\ \lambda^\pm v \\ \lambda^\pm w \\ 0.5\lambda^\pm v^2 + au(\lambda_4^\pm - \lambda_5^\pm) + a^2(\lambda_4^\pm + \lambda_5^\pm)/\bar{\gamma} \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

ここで、

$$\lambda^\pm = 2\bar{\gamma}\lambda_1^\pm + \lambda_4^\pm + \lambda_5^\pm \quad (6.39)$$

である。また、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^\pm &= \lambda_2^\pm = \lambda_3^\pm = (u + |u|)/2 \\ \lambda_4^\pm &= (u + a \pm |u + a|)/2 \\ \lambda_5^\pm &= (u - a \pm |u - a|)/2 \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

一方、van Leer の方法では、

$$\left. \begin{aligned} F_1^\pm &= \pm 0.25\rho a(M \pm 1)^2 \\ F_2^\pm &= F_1^\pm v_1 + p^\pm \\ p^\pm &= 0.25p(1 \pm M)^2(2 \mp M) \\ F_3^\pm &= F_1^\pm v \\ F_4^\pm &= F_1^\pm w \\ F_5^\pm &= F_1^\pm H_t \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

となる。ここで、 $M = u/a$ である。

- AUSM スキームでは

$$F_\sigma = \left\{ \left[u_{i/j} + |u_{i/j}| \right] z_i + \left[u_{i/j} - |u_{i/j}| \right] z_j \right\} / 2 + p_{i/j} \quad (6.42)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} z &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, H_t)^t \\ p &= (0, p, 0, 0, 0)^t \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

そして、途中の状態での対流速度と圧力は以下のように定義される。

$$u_{i/j} = u_i^+ + u_j^- \quad (6.44)$$

$$p_{i/j} = p_i^+ + p_j^- \quad (6.45)$$

ここで、 u^\pm および p^\pm は

$$u^\pm = \begin{cases} \pm 0.25a(M \pm 1)^2 & \text{for } |M| \leq 1 \\ \pm 0.5a(M \pm |M|) & \text{for } |M| > 1 \end{cases} \quad (6.46)$$

$$p^\pm = \begin{cases} \pm 0.25p(1 \pm M)^2(2 \mp M) & \text{for } |M| \leq 1 \\ \pm 0.5p(M \pm |M|)/M & \text{for } |M| > 1 \end{cases} \quad (6.47)$$