

圧縮性流体力学

Compressible Fluid Dynamics

中 村 佳 朗
Yoshiaki NAKAMURA

名古屋大学大学院工学研究科
航空宇宙工学専攻
Department of Aerospace Engineering
Nagoya University

2013年8月
August 1, 2013

序言 (Preface)

圧縮性流体力学 (compressible fluid dynamics) は高速流を取り扱う学問である。物体が空気中を運動しているとき (これは物体を固定して物体の周りに空気を流した場合と基本的に同じ)、飛行速度が速いと、流れの密度 (density) が物体表面に沿って変化する現象が発生する (速度が速くなると密度は下がる)。このような流れを圧縮性流れと呼ぶ。ここでは、運動エネルギー (機械的エネルギー) と熱力学エネルギーとのやり取りが行われる。

粘性流体力学において重要なパラメータがレイノルズ数 (Reynolds number; 慣性力と粘性力の比) であるように、圧縮性流体力学における重要なパラメータは、流れの速度と音速との比であるマッハ数 (Mach number) である。通常、流れの速度が、マッハ数で 0.3 以上であれば、圧縮性の影響を考慮する必要がある。これは、密度の変化で考えれば、静止している状態の密度に比べ、5% 程度以上密度が変化する流れに相当する。つまり密度変化が 5% 以内であれば、密度を一定とした非圧縮性流れとして近似できる。

新幹線が時速 300km で走行するとした場合、そのマッハ数は $M = 0.25$ であり、圧縮性の影響が出始める速度である。一方、今計画されているリニア新幹線が時速 500km で運用されれば、マッハ数は $M = 0.41$ で、この場合には圧縮性を考慮する必要がある。リニア新幹線は飛行機の世界に所属すると言える。

マッハ数がさらに増加して、 $M = 0.7 \sim 0.8$ ぐらいになると、飛行機の翼の上に衝撃波 (shock wave) が形成される。翼の上面で流れが加速され、局所的に超音速の流れ領域が生じる。その後、後縁に向かって流れが減速するときに、後縁までの距離が短く、そのままでは速度を落としきれないため、途中で衝撃波を発生させて、不連続的に速度を減速させ、翼の後縁で速度が 0 になるように調整される。一様流のマッハ数を増加させると、翼上面に出来る衝撃波はより強くなり、その結果、造波抵抗 (wave drag) が増える。抵抗が大きいと燃料消費が増加し、経済的な飛行は成立しない。現在飛行している旅客機 (airliner) は、この抵抗が急激に増加を開始するマッハ数である抵抗発散マッハ数 (M_{DD}) 以下で飛んでいる。

ちなみに、ヘリコプター (helicopter) でも、回転しているブレード (blade) の先端での速度は、遷音速になり (音速に近付く)、ブレード先端付近に衝撃波が発生する。従って、それ以上の速さでブレードを回転させると、効率は著しく減少する。また、この衝撃波は騒音源ともなる (HSI 騒音)。

マッハ数が 1 前後の遷音速は流れが非線形 (nonlinear) で、抵抗係数 (drag coefficient) も大きい。この領域で飛行機を飛ばすのは常識では考えにくい。マッハ数をさらに上げて、 $M > 1.5$ になると超音速の世界で、抵抗係数が $M \sim 1$ 付近よりも減少する。超音速の流れ場は双曲型方程式で表される線形の世界である。きれいな波の世界である。今は引退したコンコルドはこの速度領域で飛行した。ちなみに、コンコルドは、離陸時と、音速を超えるときに 2 回、推力を一時的に増大させるためにアフターバーナー (afterburner) を使用した。次世代超音速旅客機 (SST) の開発も検討されているが、陸地の上を飛ばすのは、ソニックブーム (地上での N 波) の軽減が必要である。

さらにマッハ数を上げて、 $M \geq 5$ になると、極超音速の世界になる。ここでは、発生した衝撃波の傾きが減少し、衝撃波が機体に近づく。衝撃波と機体との間の流れは非線形となり、解析は困難である。また、極超音速の領域 (hypersonic regime) では、熱の問題が重要である。スペースシャトルの翼の前縁半径は大きくなっているが、これは流体から物体に伝わる熱流束の大きさが、前縁半径の平方根に逆比例するためである。

非圧縮性流体力学については、テキスト「非圧縮性流体力学」を、粘性流れについては、テキスト「粘性流体力学」を参照されたい。これらのテキストの内容はそれぞれ密接に関係しており、それらを適宜参照すれば、流れに伴う現象をより良く理解できるであろう。

目次

第1章	圧縮性流体基礎	1
1.1	圧縮性流体とは	1
1.2	マッハ数	1
1.3	密度変化と速度変化の関係	5
1.4	マッハ数による流れの種類	6
1.5	マッハコーン	7
1.6	圧縮性流を解くための支配方程式	8
1.7	熱力学の関係式	11
第2章	断熱流と等エントロピー流	17
2.1	エネルギー方程式	17
2.2	エネルギーが一定の場合の流れの諸量とマッハ数の関係	20
2.3	エントロピーが一定の場合	21
2.4	音速点での値	23
第3章	管内の等エントロピー流	25
3.1	連続の方程式	25
3.2	完全ガスの関係式	27
3.3	チョーク	29
第4章	平板上の流れ	31
4.1	回復係数	31
4.2	圧縮性流での境界層方程式	32
4.3	相似解	33
第5章	圧力係数	43
5.1	微小擾乱流における圧力係数	43
5.2	臨界圧力係数	45
5.3	澱点圧力係数	45
5.4	臨界マッハ数	46
第6章	薄翼理論	49
6.1	非線形ポテンシャル方程式	49
6.2	方程式の線形化	50
6.3	相似則	52

第 7 章	衝撃波	57
7.1	衝撃波とは	57
7.2	衝撃波の支配方程式	58
7.3	衝撃波前後での諸量の変化	59
7.4	ランキン・ユゴニオの関係式	61
7.5	プラントルの関係式	65
7.6	斜め衝撃波	66
7.7	Crocco の定理	71
7.8	楔と円錐周りの流れの違い	72
7.9	Taylor-Maccoll の関係式	73
第 8 章	遷音速流	77
8.1	遷音速流とは	77
8.2	高速翼	78
8.3	波動抵抗	81
8.4	遷音速流でのエントロピー上昇	81
8.5	遷音速相似則	82
8.6	エリアルール	86
8.7	波動抵抗最小物体	86
8.8	衝撃波・境界層干渉	89
第 9 章	超音速流	91
9.1	超音速流とは	91
9.2	特性曲線理論	91
9.3	特性曲線上での方程式	96
9.4	2次元超音速流に対する特性曲線	99
9.5	単純波	106
9.6	2次元ノズル流れ	108
9.7	超音速空気力学	109
9.8	リーマン問題	117
第 10 章	ノズルとジェット	123
10.1	音速ノズル	123
10.2	超音速ノズル	124
10.3	ノズル噴出流のパターン	125
10.4	ロケットノズルの形状	126
10.5	推力	127
10.6	比推力	127
10.7	運動量係数	127
10.8	ジェットの衝撃波セル構造	128
10.9	亜音速ジェット	128
10.10	超音速ジェット	129
10.11	ジェットの拡がり	129
10.12	混合層	130

第 11 章 極超音速流	131
11.1 極超音速流の特徴	131
11.2 高温での空気組成変化	132
11.3 内部エネルギー	132
11.4 比熱	134
11.5 極超音速流の解析	135
11.6 上空での大気の組成変化	136
11.7 極超音速相似パラメータ	138
11.8 Newton 近似	142
11.9 平板前縁での流れの干渉	144
11.10 澱点空力加熱率	147
11.11 球頭周りの熱流束分布	147
11.12 衝撃波干渉	148
11.13 大気圏外への飛行	149
11.14 輻射	149

第1章 圧縮性流体基礎

ここでは、圧縮性流体力学の基礎的性質について勉強する。

1.1 圧縮性流体とは

流れの速度が遅い場合には、非圧縮性流 (incompressible flow) として、密度が一定であると近似できる。そこでは、密度の変化を無視する。一方、圧縮性流体 (compressible fluid) とは、圧力 (pressure) が上がると、容積 (volume) が減少して、その結果、密度 (density) が上昇する流体である。逆に、圧力が下がると、容積が増大して、その結果、密度が減少する。圧縮性流体力学は、気体力学 (gas dynamics) とも関係がある。流れの速度 (対流速度; convective velocity) がある程度以上に大きくなったときには、圧縮性を考慮して考える必要がある。また、圧縮性流で最も大事なパラメータはマッハ数 (Mach number) である。圧縮性流の速度を考えると、常に音速 (sound speed) が基準となり、音速に比べて流れの速度がどれくらい大きい、あるいは、どのくらい小さいかで諸量の性質が決定される。

1.1.1 圧縮性流に現れるパラメータ

圧縮性流 (compressible flow) では、以下のパラメータが重要となる。

- マッハ数 (流れの速度と音速との比) $M = V/a$
- 比熱比 (等圧比熱と等容比熱との比) $\gamma = C_p/C_v$
- レイノルズ数 (慣性力と粘性力の比) $Re = \rho VL/\mu = VL/\nu$
- プラントル数 (速度拡散と温度拡散の比) $Pr = \mu C_p/k$

1.2 マッハ数

圧縮性の程度はマッハ数 M によって決定される。マッハ数とは、流れの速度 V と音速 a の比で、無次元のパラメータである。

$$M \equiv \frac{V}{a} \quad (1.1)$$

音速は等エントロピーとして、

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (1.2)$$

の式から計算できる。ここで、 p は圧力、 ρ は密度である。この式の下付き添え字 s は、この微分がエントロピー (s) が一定の下に行われることを示している。つまり、この微分は、熱の出入りがないとした断熱状態で実行される。密度を少し変化させるのに大きな圧力変化を必要とする場合には音速は大きくなる。その意味で、水の方が空気より音速が大きい。従って、水では、通常の流れの速度

ではマッハ数が小さくなり、圧縮性の効果は空気に比べて出にくくなる。完全ガスの場合、音速の2乗は温度に比例する (式 (1.13) 参照)。

1.2.1 音速

音速 (sound speed, sonic velocity, acoustic speed) とは、微小擾乱が流体中を伝播する速度である。この擾乱の強さが大きくなると衝撃波 (shock wave) になる。衝撃波は音速より速い速度で伝播する。逆に言えば、衝撃波の強さを弱めていくと、音波になる。完全ガス (熱的完全ガス: calorically perfect gas) の場合の音速の式は以下のようである。

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (1.3)$$

ここで、 γ は比熱比 (the ratio of specific heats)、 R は単位質量当りのガス定数 (gas constant)、 T は温度 (絶対温度: absolute temperature) である。

(注意) 完全ガスには、

- 熱的完全ガス (thermally perfect gas)
- 熱量的完全ガス (calorically perfect gas)

がある。前者の熱的完全ガスの場合は、以下の状態方程式 (the equation of state) で表される。

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1.4)$$

また、後者の熱量的完全ガスの場合は、比熱が一定の場合である。実在ガスでは、比熱は温度の関数で、高温になると比熱は温度とともに上昇する。(了)

微小擾乱は音速の速さで一般の物質内を伝播する。つまり、音波が物質内を伝播するのにある時間を要する。弾性波 (elastic wave) として伝播するため、弾性体 (elastic body, elastic solid) の内部で要素同士の引き合う力が大きければ大きいほど、音波はより速く伝播する。弾性体の微小波は弾性波で、音波と呼ばれる。

一方、非圧縮性流体は弾性体ではなく剛体 (rigid body) に相当し、流体中のどこかが押されると、全体のあらゆる点が瞬時に変化する。その意味では、非圧縮性流体の音速は無限大であると考えて良い。

音波が流体中を伝播するとき、音波の後ろでは、諸量の値が多少変化する。音波と関連させて、微小な圧力波 (compression wave) を考えてみる。圧力波が通り過ぎると、その後ろでは、熱力学変数である圧力、密度、温度が増加する。静止流体中に圧力波が伝播することを考える (図 1.1)。

- 圧力波の前では: $u = 0, p, \rho, T$ (ここでの流れは静止している)
- 圧力波の通過後では: $du, p + dp, \rho + d\rho, T + dT$

ここでは、圧力波は x 軸の負の方向に伝播しており、圧力波の後ろの流れの速度の向きは、圧力波の進行方向と同じ向きである ($du < 0$)。ちなみに、この波が圧力波ではなく膨張波 (rarefaction wave) であれば、膨張波の後ろの流れの速度は正となり、膨張波の進行方向とは反対向きに流体は動く ($du > 0$)。

圧縮波を外から観察して、運動している圧縮波を解析するのは困難である。そこで、圧縮波を静止させて考えるために、圧縮波の上に乗って流れを観察する (図 1.2)。この変換のために、圧縮波の波

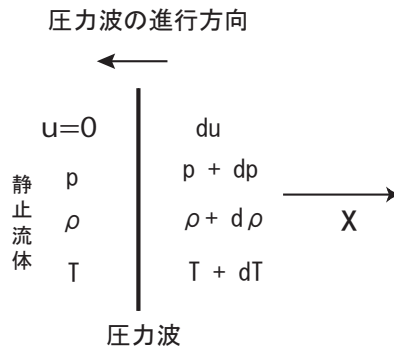


図 1.1: 微小圧力波の伝播 (外から見た場合)

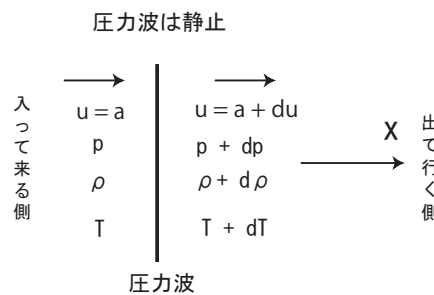


図 1.2: 微小圧力波前後の関係 (圧力波の上に乗って見た場合)

面の前後の流れに速度 a (音速) を、圧縮波の進行方向と逆方向に加える。その結果、波面の前後の量は、以下ようになる。

- 圧力波の左側 (入る側) では : a, p, ρ, T
- 圧力波の右側 (出る側) では : $a + du, p + dp, \rho + d\rho, T + dT$

波面上に乗って見るという変換 (速度の変換) を行っても、熱力学変数である圧力 p 、密度 ρ 、温度 T は同じままである。

波面を通過する質量流量を考えてみよう。図 (1.2) において、波面上のある面積 A に入ってくる流量は $A\rho a$ 、出て行く流量は $A(\rho + d\rho)(a + du)$ である。質量保存の関係より両者は等しいので、

$$A\rho a = A(\rho + d\rho)(a + du) \tag{1.5}$$

となる。この式を展開して、2次の微小量を無視すると、

$$du = -a \frac{d\rho}{\rho} \tag{1.6}$$

となる。この式を解釈すると、今、圧力波を考えているので、圧縮波が通過した後では密度が上昇し、つまり $d\rho > 0$ となり、その結果、 $du < 0$ となる。つまり、圧縮波の波面 (wave front) の後ろでは、流れは減速する。

一方、ここで、運動量の変化=力積の関係を適用する。波面を含む検査体積 (control volume) を考え、(左の面から押す力) - (右の面から押す力) を左辺にし、運動量の出入りを右辺にすると、

$$pA - (p + dp)A = (A\rho a)(a + du) - (A\rho a)a \tag{1.7}$$

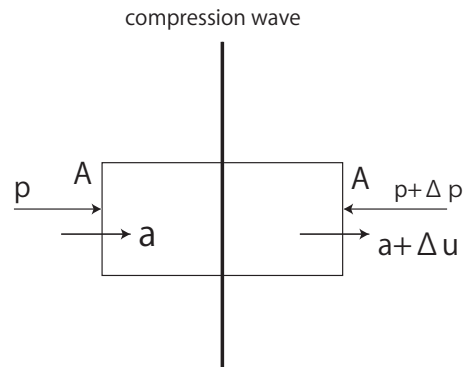


図 1.3: 圧力波を囲む検査体積

となる。ここで、 $A\rho a$ は質量流量である。式 (1.7) を簡単化すると

$$dp = -\rho a du \quad (1.8)$$

となる。

以上得られた2つの式、つまり式 (1.6) と式 (1.8) から du を消去すると

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (1.9)$$

となる。この圧縮波は弱く、その厚さは非常に薄いので、圧縮波を横切つての変化は、等エントロピー (断熱での変化) と考えても差し支えない。従って、

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (1.10)$$

ここで、添え字 s はエントロピー一定での微分を表す。

後述する、 p と ρ との間の等エントロピーの関係式 (1.82) :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \quad (1.11)$$

を使用すると、式 (1.10) は、

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad \text{あるいは} \quad a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (1.12)$$

となる。この式に完全ガスの状態方程式 (1.4) を適用すると、

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (1.13)$$

が得られる。

空気の場合、温度 15°C では、 $a = 340\text{m/s}$ である。ちなみに、水の場合には、1気圧、 20°C で、 $a = 1,482\text{m/s}$ である。つまり、水の音速は、空気の4倍強である。ちなみに、ニュートン (Sir Isaac Newton; 1642-1727) は、音速に対する式を間違えて誘導した。Newton は、式 (1.10) に対して、状態方程式 ($p = \rho RT$) を使って計算した。その結果、式 (1.13) において γ のない式を音速の式とした。

1.3 密度変化と速度変化の関係

流れの速度を上げていくと、マッハ数が小さいときには圧縮性はほとんど効かないが、マッハ数が大きくなると圧縮性が効いてくる。まず、流体の連続の方程式（質量保存を表す）は、圧縮性流では、定常流の場合（ $\partial/\partial t = 0$ ）

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (1.14)$$

と書くことができる。ここで、 ∇ はナブラ (nabla) と呼ばれる微分演算子 (differential operator) で、その成分は各方向の勾配である。2次元であれば、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ となる。連続の方程式 (1.14) を書き下すと、2次元流では

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (1.15)$$

となる。

非圧縮性流の場合には、密度変化が小さいので、近似的に $\rho = \text{const}$ と考えて、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.16)$$

となる。

圧力変化と密度の変化は関係には、等エントロピー流の場合、上述の音速の定義式 (1.10) が使用できる。

$$\delta p \sim a^2 \delta \rho \quad (1.17)$$

また、オイラーの運動方程式 (the equation of motion) では (粘性を無視した場合の運動方程式)、1次元の場合

$$V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.18)$$

となる。ここで、 V は流れの速度である。この式を変形すると

$$V \delta V \sim \frac{\delta p}{\rho} \quad (1.19)$$

となる。ここでは大きさだけを考慮するので、符号は無視する。式 (1.17) および式 (1.19) から δp を消去すると、

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \sim \frac{V^2}{a^2} \frac{\delta V}{V} \quad \text{or} \quad \frac{\delta \rho}{\rho} \sim M^2 \frac{\delta V}{V} \quad (1.20)$$

が得られる (ここで、 $M = V/a$)。

密度のほとんど変化しない非圧縮性流の場合には、

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \ll \frac{\delta V}{V} \quad (1.21)$$

と考えられるので、非圧縮性流であるためには、式 (1.20) より、

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} \ll 1 \quad (1.22)$$

である必要がある。この目安としては $M < 0.3$ である。このとき、 $M^2 < 0.09$ である。つまり、密度の相対変化は、速度の相対変化の、約 1 割以下となる。

ちなみに、後述するように (式 (2.32))、流れが等エントロピーで変化する場合、流れを静止させた場合の密度である澁み密度 ρ_0 と流れている状態での密度 ρ の比をマッハ数で表すと、

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2 \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (1.23)$$

となる。ここで、 γ は比熱比である ($\gamma = C_p/C_v$)。これをマッハ数が小さいとして ($M \ll 1$)、テーラー展開すると

$$\frac{\rho}{\rho_0} \approx 1 - \frac{1}{2}M^2 \quad (1.24)$$

となり、右辺に $M = 0.3$ を代入すると、 $\rho/\rho_0 \approx 0.96$ となる。つまり、静止している状態から速度を上げていき、マッハ数が $M = 0.3$ になると、その時の密度は 5% 程度減少することになる。従って、通常、 $M = 0.3$ 以上を圧縮性流と考え、 $M = 0.3$ 以下を非圧縮性流とみなす。ちなみに、流れの速度が音速に等しくなると (つまり $M = 1$ になると)、そのときの流れの密度は、流れが静止しているときの密度の約 6 割に減少する ($\rho/\rho_0 \approx 0.63$)。

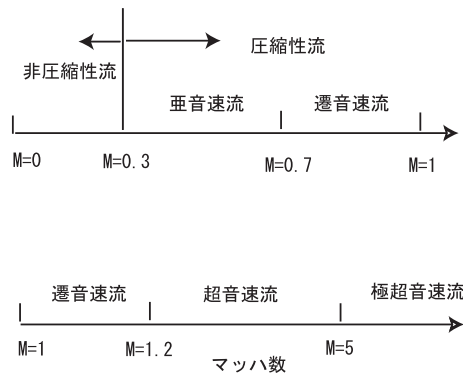


図 1.4: マッハ数と流れの関係

1.4 マッハ数による流れの種類

圧縮性の流れを、マッハ数の大きさによりいくつかの特徴のある流れに分類できる。

- 非圧縮性流 (incompressible flow) : $M < 0.3$; 流れによる密度の変化をほとんど考える必要がない。
- 亜音速流 (subsonic flow) : $0.3 < M < 0.8$; 流れの中に翼を置いた場合、翼面上に衝撃波が現れる速度領域まで。
- 遷音速流 (transonic flow) : $0.8 < M < 1.2$; 音速前後の流れで、高亜音速と低超音速からなる。諸量がマッハ数に対して非線形に変化する領域で、解析や予測が困難である。これに関しては、1970年代初頭から、非線形の支配方程式をコンピュータで数値的に解く方法が開発され、ブレイクスルーとなった。
- 超音速流 (supersonic flow) : $1.2 < M < 5$; 流れ場は線形となり、波動型方程式の解を使って解析される。
- 極超音速流 (hypersonic flow) : $5 < M$; 物体前方にできる弓形衝撃波 (bow shock) が物体にかなり近づき、この衝撃波と物体との間の領域である衝撃層 (shock layer) 内で、物体表面から衝撃波に向かって流れの諸量が急激に変化する。流れ場は非線形となり、解析は困難である。さらに、流れとともに熱を考慮する必要がある。例えば、スペースシャトルの周りの流れがこれに相当する。

1.5 マッハコーン

非常に微小な擾乱（非常に小さな物体）が気体中を動くときに、その周りにその擾乱が作り出す波が流れ場中を四方八方に伝播する。しかし、そのパターン（伝播の仕方）は、物体の速度（物体に乗って見れば、物体に向かってくる流れの速度）によって異なる。以下に、物体の速度（あるいは流れの速度）による、擾乱波の伝播の仕方について説明する。

1.5.1 亜音速の場合 ($M < 1$)

物体が亜音速で飛行している場合、物体から発生する擾乱波が、物体から四方八方に向かって伝播する。つまり、物体の進行方向にいる人は、その物体が自分の方に向かって来ることが感知できる。この場合の流れ場を表わす方程式は、楕円型 (elliptic type) となる。楕円型の方程式では、流れ場の領域を長方形とすれば、長方形の4つの辺で境界条件を与えると、流れ場の領域での解が得られる。ちなみに楕円型方程式として一番基本的な方程式は、ラプラス方程式である。

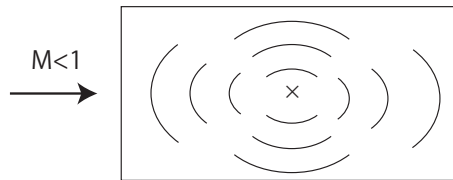


図 1.5: 擾乱が作る波の伝播 (亜音速流の場合)

1.5.2 音速流 ($M = 1$)

物体が音速で飛行している場合、物体の進行速度と擾乱による波の進行速度が、物体の前進方向では同じになる。運動している物体が存在するという情報は（物体の擾乱は）物体を通る進行方向に垂直な面を上下方向に、及びその面から下流側領域にのみ伝播する。この場合の流れ場は放物型 (parabolic type) の方程式で支配される。放物型方程式では、3つの辺（左、上、下）だけで値を与えれば、長方形内の流れ場の解は決定される。

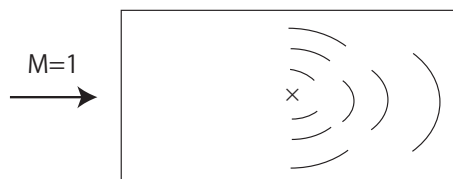


図 1.6: 擾乱が作る波の伝播 (音速流の場合)

1.5.3 超音速流 ($M > 1$)

物体が超音速で飛行する場合（物体に乗って見れば、超音速の流れが自分に向かって来る場合）、物体の進行速度 \vec{V} が音波の伝播速度 a を上回ることになる。これにより超音速に特有なマッハコー

ン(マッハ円錐: Mach cone)という領域が流れ場に形成される(物体を頂点として下流側に円錐状に広がる領域: 図 1.7 参照)。物体から発生する擾乱は、この領域に閉じ込められる。つまり、超音速飛行する物体の前方にいる人は、その物体が来るまで気が付かない。もっと言えば、通り過ぎた後に物体の存在に気付くことになる。

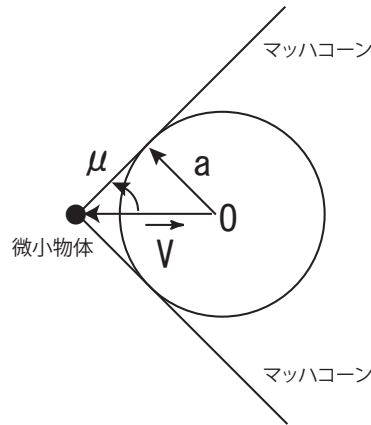


図 1.7: マッハコーン (マッハ円錐)

物体の運動速度 V と擾乱 (音波) の進行速度 a からマッハコーンの角度 μ (これをマッハ角と呼ぶ) は

$$\sin \mu = \frac{a}{V} = \frac{1}{M} \quad (1.25)$$

となる。ここで、 M はマッハ数である。この式から分かるように、マッハ数 M が増加するとともに、マッハ角 μ は減少する。また、マッハ数が 1 に近づけば、マッハ角は $\mu = 90^\circ$ になり、上述の音速流の場合になる。

マッハ角の別の定義として、 \tan で表す場合もある。

$$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (1.26)$$

(注意) 物体が微小な場合は、発生する擾乱も小さい。この場合は、擾乱が伝播する速度は音速になる。一方、擾乱が強くなると、擾乱は音速以上の速度で伝播する。これが衝撃波 (shock wave) である。音波は、衝撃波の一番弱い場合と考えても良い。(了)

1.6 圧縮性流を解くための支配方程式

圧縮性流 (compressible flow) を解くための方程式は、非圧縮性流 (incompressible flow) と基本的には同じであるが、状態方程式が必要になることと、エネルギー方程式に熱力学 (thermodynamics) が入ってくることである。

- 連続の方程式 (the equation of continuity)
- 運動方程式 (the equation of motion) あるいは運動量方程式 (the equation of momentum)
- エネルギー方程式 (the equation of energy)

- 状態方程式 (the equation of state)
- 粘性係数 μ に対する近似式

粘性係数 μ は温度 T の関数として近似される。空気に対してはサザーランド (Sutherland) の式が用いられる。

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + C}{T + C} \quad (1.27)$$

ここで、空気 (air) の場合、例えば、 $C = 120$, $T_0 = 291.15$, $\mu_0 = 1.827 \times 10^{-5}$ である。

1.6.1 オイラー方程式

オイラー方程式 (the Euler equations) とは、ナビエ・ストークス方程式 (the Navier-Stokes equations) において粘性係数 (viscous coefficient) μ と熱伝導係数 (thermal conductivity) k の両方を 0 にしたものである。3次元オイラー方程式は、ベクトル表示で表すと、以下のようになる。

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial z} = 0 \quad (1.28)$$

ここで、

$$\vec{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e_t)^t \quad (1.29)$$

$$\vec{E} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (e_t + p)u)^t \quad (1.30)$$

$$\vec{F} = (\rho v, \rho vu, \rho v^2 + p, \rho vw, (e_t + p)v)^t \quad (1.31)$$

$$\vec{G} = (\rho w, \rho wu, \rho wv, \rho w^2 + p, (e_t + p)w)^t \quad (1.32)$$

$$\vec{v} = (u, v, w) \quad (1.33)$$

$$e_t = \rho(e_i + \vec{v}^2/2) \quad (1.34)$$

\vec{Q} は保存量の解ベクトル、 $\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$ は、 x, y, z 方向の流束ベクトル (flux vector)、 e_i は単位質量当りの内部エネルギー、 e_t は単位体積当りの全エネルギー (内部エネルギー + 運動エネルギー) である。また、 ρ は密度、 p は圧力、 u, v, w は x, y, z 方向の速度成分である。

ちなみに、流束ベクトル \vec{E} の最後の成分は、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} (e_t + p)u &= \left\{ \rho e_i + \rho \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + p \right\} u \\ &= \rho u \left(e_i + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \\ &= \rho u \left(h + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) \\ &= \rho u H_t \end{aligned} \quad (1.35)$$

ここで、 H_t は全エンタルピーで、 $H_t \equiv h + (u^2 + v^2 + w^2)/2$ である。同様に、流束ベクトル \vec{F} の場合は、 $\rho v H_t$ 、流束ベクトル \vec{G} の場合は、 $\rho w H_t$ と変形される。

(参考 1) 数値流体力学 (CFD: Computational Fluid Dynamics) では、デカルト座標 (x, y, z) ではなく、一般座標 (ξ, η, ζ) で表わされた方程式が使用される。それを以下に示す。

$$\hat{Q}_t + \hat{E}_\xi + \hat{F}_\eta + \hat{G}_\zeta = 0 \quad (1.36)$$

ここで、添え字は微分を表わす。また、 $\hat{()}$ で表わされる量は、以下の式で計算される。

$$\hat{Q} = J(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e_t)^t \quad (1.37)$$

$$\hat{E} = J(\rho U, \rho u U + \xi_x p, \rho v U + \xi_y p, \rho w U + \xi_z p, (e_t + p)U - \xi_t p)^t \quad (1.38)$$

$$\hat{F} = J(\rho V, \rho u V + \eta_x p, \rho v V + \eta_y p, \rho w V + \eta_z p, (e_t + p)V - \eta_t p)^t \quad (1.39)$$

$$\hat{G} = J(\rho W, \rho u W + \zeta_x p, \rho v W + \zeta_y p, \rho w W + \zeta_z p, (e_t + p)W - \zeta_t p)^t \quad (1.40)$$

$$(1.41)$$

または、以下のように整理して書くこともできる。

$$\hat{E} = \xi_t Q + \xi_x E + \xi_y F + \xi_z G \quad (1.42)$$

$$\hat{F} = \eta_t Q + \eta_x E + \eta_y F + \eta_z G \quad (1.43)$$

$$\hat{G} = \zeta_t Q + \zeta_x E + \zeta_y F + \zeta_z G \quad (1.44)$$

ここで、 ξ_t, η_t, ζ_t は、一般座標が時間とともに変化する場合に考慮されるものである。一般座標が時間とともに変化しない場合には、これらは0になる。また、デカルト座標 (x, y, z) での、解ベクトル Q と、各座標方向、つまり x, y, z 方向の流束ベクトル E, F, G は、

$$Q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e_t)^t \quad (1.45)$$

$$E = (\rho u, \rho u u + p, \rho u v, \rho u w, (e_t + p)u)^t \quad (1.46)$$

$$F = (\rho v, \rho v u, \rho v v + p, \rho v w, (e_t + p)v)^t \quad (1.47)$$

$$G = (\rho w, \rho w u, \rho w v, \rho w w + p, (e_t + p)w)^t \quad (1.48)$$

である。

また、 (x, y, z) 座標から (ξ, η, ζ) 座標への座標変換を表わすヤコビアン J 、および一般座標上で考える速度である反変速度の各成分 U, V, W は、

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\zeta y_\eta z_\xi - x_\eta y_\xi z_\zeta - x_\xi y_\zeta z_\eta \quad (1.49)$$

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \quad (1.50)$$

$$V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \quad (1.51)$$

$$W = \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \quad (1.52)$$

となる。ここで、逆数 (reciprocal) の $1/J$ を J と定義して使用している場合もあるので注意すること。ただこれは定義だけの問題で、実質的には変わらない。(了)

(参考2) その他、数値流体力学では、積分形 (Integral form) の方程式が使用される。これは、主に、有限体積法 (Finite Volume Method) で使われる。ちなみに、上で誘導された方程式は、微分形 (Differential form) である。積分形の方程式は、以下のように表わすことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \vec{Q} dV + \iint_{\partial\Omega} \vec{H} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1.53)$$

ここで、テンソル \vec{H} は、

$$\vec{H} = (\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}) \quad (1.54)$$

である。また、 \vec{n} は積分表面に垂直な単位法線ベクトルである。 $\vec{H} \cdot \vec{n}$ は、テンソルとベクトルの内積で、結果はベクトルとなり、

$$\vec{H} \cdot \vec{n} = \vec{E}n_x + \vec{F}n_y + \vec{G}n_z \quad (1.55)$$

として計算できる。(了)

1.7 熱力学の関係式

圧縮性流では、熱力学の関係式を考慮して、流れの諸量が決定される。エネルギーを考えると、運動方程式から得られる機械的エネルギー（運動エネルギー）と、熱力学によるエネルギーの両方を考慮し、お互いのエネルギーを交換しながら流れは変化する。ちなみに、非圧縮性流の場合には、熱力学のエネルギーと機械的エネルギーをカップリングさせる必要はなく、まず運動方程式から速度場を解き、その後、その速度場の情報を使って、エネルギー式から温度場を求める。

以下に熱力学に関連した大事な項目を記す。

1.7.1 状態方程式

非圧縮性流においては密度一定 ($\rho = const$) が状態方程式となるが、圧縮性流においては、熱力学の関係式が必要となる。一般的には、 $p = p(\rho, T)$ として、圧力 p を密度 ρ と温度 T の関数として与える必要がある。圧力がさほど大きくないときには（地球上の大気など）、近似式として、完全ガス（熱的完全ガス; thermally perfect gas）の状態方程式が良く使われる。

$$p = \rho RT \quad (1.56)$$

ここで、 R は単位質量当りのガス定数で、空気の場合には、 $R = 287 \text{m}^2/(\text{s}^2\text{K})$ である。ちなみにこの式は、古典熱力学 (classical thermodynamics) から導かれた経験式である。

[参考]

式 (1.56) は、分子間の相互作用がない場合の式である。実在気体では、分子間に引力や斥力が作用する（分子間距離が小さい場合には斥力、大きい場合には引力）ため、この式からずれてくる。このずれを考慮した式が、ファン・デア・ワールス (van der Waals) の状態式である。

$$\left(p - \frac{V^2}{N^2}a\right)(V - Nb) = NkT \quad (1.57)$$

ここで、 V は体積、 N は分子数、 k はボルツマン定数である。また、 a 、 b は気体により異なる定数で、 a は引力の部分、 b は斥力部分を表す。ちなみに、ボルツマン定数とは分子 1 個当りのガス定数である。

1.7.2 内部エネルギー

内部エネルギー e_i は流体の温度を決定する。

$$e_i = C_v T \quad (1.58)$$

この式は、等積比熱 C_v が一定の場合に成立する。これを熱量的完全ガス (calorically perfect gas) と呼ぶ。ちなみに、式 (1.58) は単位質量当りの式である。

1.7.3 エンタルピー

単位質量当りのエンタルピー h の定義は、

$$h = e_i + \frac{p}{\rho} \quad (1.59)$$

である。熱量的完全ガスの場合には

$$h = C_p T \quad (1.60)$$

となる。この式も等圧比熱 C_p が一定の場合に成立する。

1.7.4 比熱

比熱 (specific heat) とは、単位質量のガスの温度を 1°C 上げるのに必要な熱量である。等圧比熱 C_p 、等積比熱 C_v の2種類がある。等圧比熱とは圧力を一定にして温度を上げる場合で、等積比熱とは体積を一定にして温度を上げる場合である。また、 γ は比熱比である。(他にも述べるが、比熱比 γ は圧縮性流体では大事なパラメータである)

完全ガスの場合には以下の関係式が存在する。

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad C_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad C_p - C_v = R \quad (1.61)$$

空気の場合には、

$$C_p = 1005 \text{ m}^2 / (\text{s}^2 \text{K}), \quad C_v = 718 \text{ m}^2 / (\text{s}^2 \text{K}) \quad (1.62)$$

となる。

1.7.5 比熱比

比熱比 (the ratio of specific heats) とは、等圧比熱 C_p と等積比熱 C_v の比で、圧縮性流体では大事な役割を果たす。

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (1.63)$$

空気の場合 (2原子分子の場合) には、 $\gamma = 1.4$ である。

[参考] 一般的には分子の運動の自由度を f とすれば、比熱比 γ は

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{2}{f} = \frac{f+2}{f} \quad (1.64)$$

となる。従って、

- 単原子分子の場合 (He, Ne, Ar, Xe など): $f = 3$ より、 $\gamma = 5/3$ 。これは、 x, y, z の3方向の並進運動が存在するので、自由度が3になる。
- 2原子分子の場合 (O_2, N_2 など): $f = 5$ より、 $\gamma = 7/5 = 1.4$ 。これは、 x, y, z の3方向の並進運動の他に、回転の自由度2 (回転軸が2個) が加わる。(ちなみに、高温状態になると振動が励起され、この自由度が2個加わる。)
- 3原子分子の場合: $f = 6$ より、 $\gamma = 8/6$ 。これは、 x, y, z の3方向の並進運動と、回転の自由度3 (回転軸が3個) より。

以上のことから、比熱比 γ は

$$1 \leq \gamma \leq \frac{5}{3} \quad (1.65)$$

の範囲の値をとる。(後述するが、極超音速流で出てくるニュートン近似流は、 $\gamma = 1$ の流れである)

1.7.6 エントロピー

エントロピーの定義は

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (1.66)$$

である。ここで dS はエントロピーの変化量、 dQ は加えられた熱量である。エントロピーの単位は、単位質量当りで考えるので、 $J/(KgK)$ である。

ここで熱力学の第一法則を適用する。つまり、加えられた熱量は、内部エネルギーの増加と外に対する仕事に使われる。

$$dQ = de_i + pdv \quad (1.67)$$

v は比容積で、単位質量あたりの体積である ($v = 1/\rho$)。これを式 (1.66) に代入すると

$$\begin{aligned} dS = \frac{dQ}{T} &= \frac{de_i + pdv}{T} \\ &= \frac{C_v}{T} dT + \rho R d\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ &= \frac{C_v}{T} dT - \frac{R}{\rho} d\rho \\ &= \frac{C_v}{T} dT - \frac{C_p - C_v}{\rho} d\rho \end{aligned} \quad (1.68)$$

となる。誘導の途中で、完全ガスの関係式が使われている。

式 (1.68) を積分すると、エントロピー S は、

$$S = C_v \ln T - (C_p - C_v) \ln \rho + C \quad (1.69)$$

となり、 C は一定値である。この式を C_v で割ると

$$\frac{S}{C_v} = \ln T - (\gamma - 1) \ln \rho + \frac{C}{C_v} \quad (1.70)$$

$$= \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} + \frac{C}{C_v} \quad (1.71)$$

この式は一様流でも成り立つので、一様流での値を代入すると、

$$\frac{S_\infty}{C_v} = \ln \frac{T_\infty}{\rho_\infty^{\gamma-1}} + \frac{C}{C_v} \quad (1.72)$$

となる。式 (1.71) から式 (1.72) を引くと、エントロピーの一様流からの変化は

$$\frac{S - S_\infty}{C_v} = \ln \left(\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} \cdot \frac{\rho_\infty^{\gamma-1}}{T_\infty} \right) \quad (1.73)$$

となる。

比熱 C_p , C_v が温度の関数であるとき、つまり、 $C_p = C_p(T)$, $C_v = C_v(T)$ の場合には、エントロピーは、温度・エントロピー線図 ($T-S$ 線図) から求める。

完全ガスの状態方程式は、

$$p = R\rho T \quad (1.74)$$

より、この式の微小変化をとると、

$$\Delta p = RT\Delta\rho + R\rho\Delta T \quad (1.75)$$

となる。この左辺と右辺を式(1.74)で割ると、

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta T}{T} \quad (1.76)$$

となる。

式(1.68)を等積比熱 C_v で割ると、

$$\frac{dS}{C_v} = \frac{dT}{T} - (\gamma - 1) \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.77)$$

となる。この式に、式(1.76)を代入すると、

$$\frac{dS}{C_v} = \frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.78)$$

となる。この式を積分すると

$$\begin{aligned} \frac{S}{C_v} &= \ln p - \gamma \ln \rho + C \\ &= \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + C \end{aligned} \quad (1.79)$$

となる。あるいは、この式を指数関数で表すと、

$$\exp(S/C_v - C) = \exp(-C) \cdot \exp(S/C_v) = \frac{p}{\rho^\gamma} \quad (1.80)$$

となる。ここで、改めて、 $\exp(-C)$ を改めて定数 C と置けば、

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C \exp(S/C_v) \quad (1.81)$$

となる。

エントロピーが一定の場合には、式(1.81)において $S = \text{const}$ より、

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} \quad (1.82)$$

となる。ちなみに、この式に、完全ガスの状態方程式を代入すると、エントロピーが一定の場合の、 T と ρ の関係、 T と p の関係が得られる。

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{const}, \quad \frac{T}{p^{(\gamma-1)/\gamma}} = \text{const} \quad (1.83)$$

流れ場中に摩擦や衝撃波が存在すると、流れのエントロピーが変化する。変化する前のエントロピーを S_1 、変化した後のエントロピーを S_2 とすると、式(1.68)と式(1.76)から、

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (1.84)$$

となる。

例えば、衝撃波の前での値を p_1, ρ_1, T_1 、衝撃波の後での値を p_2, ρ_2, T_2 とすれば、衝撃波を通過した後のエントロピーの増加量 $\Delta S = S_2 - S_1$ がこの式から計算できる。

エントロピーが変化しない等エントロピー状態での流れでは、式(1.84)において、 $S_1 = S_2$ とおけば、次の関係が得られる。

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (1.85)$$

ちなみに、式(1.82)からも、この式は得られる。

[参考]

統計力学でのエントロピーは、Boltzmann(1877)によって定義された。

$$S = k \log W \quad (1.86)$$

ここで、 k はボルツマン定数、 W は可能な量子状態の総数である。ちなみに、熱力学 (thermodynamics) とは、経験事実に基づく現象論的な理論であり、一方、統計力学 (statistical mechanics) とは、原子的・分子的構造の力学と確率論を融合させて導かれる理論である。

第2章 断熱流と等エントロピー流

ここでは、流れを単純化して調べる。具体的には、ダクトや管(パイプ)の中の流れを考える。近似としては、ダクトの中心線が流れ方向に大きな曲率を持っていない、あるいは、ダクトの断面積が流れ方向に急激に変化しない場合に相当する。そこでは、ダクトの断面積内の諸量の分布を無視する。つまり、断面積内での平均値を考え、それで代表させる。

ここで注意することは、断熱と等エントロピーとは異なることである。簡単に言えば、断熱であっても、エントロピーは上昇する可能性があるということである。この良い例は、パイプ内の高速流で、壁を断熱にしても、境界層内の粘性のために熱が生成され、エントロピーが上昇する。ちなみに、このときの熱生成はマッハ数の2乗に比例する。

2.1 エネルギー方程式

ダクトの中のコントロールボリューム(検査体積)を考える。熱力学の第1法則より

$$\frac{d}{dt} \int \rho \left(e_i + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int \left(e_i + \frac{v^2}{2} \right) \rho u_j dA_j = \int u_i \sigma_{ij} dA_j - \int \vec{q} \cdot d\vec{A} \quad (2.1)$$

となる。ここで、 $v^2/2$ は、流れの単位質量当たりの運動エネルギー(kinetic energy)で、 u_i は流れの速度ベクトル \vec{v} の i 方向成分である。また、 σ_{ij} は応力テンソルの成分である(圧力 p も含むことに注意)。 dA_j は、 $d\vec{A} = \vec{n}dA$ (断面を構成する微小要素ベクトル。ベクトルの大きさは微小要素の面積で、ベクトルの向きは微小要素に垂直方向)の j 方向成分である。

左辺第1項は検査面内に蓄えられる全エネルギー(内部エネルギー e_i と運動エネルギーの和)の時間変化である。左辺第2項は、検査面の表面を出入りするエネルギー流束の差し引きである。右辺第1項は、検査面の表面に作用する力による仕事である。また、右辺第2項は、検査面を通過して出入りする熱量の差し引きである(熱量が検査面を出て行く場合は負となる)。

\vec{q} は熱流束で、単位時間当たり・単位面積当たりを通過する熱量である。これは、フーリエの法則で以下のように表される。

$$\vec{q} = -k\nabla T \quad (2.2)$$

ここで、 k は熱伝導率(熱伝導係数)、 T は温度である。

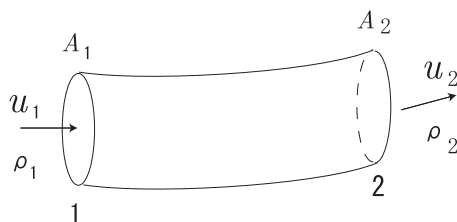


図 2.1: 準1次元流

ここでは、1次元問題を考える。質量流量 \dot{m} が一定であることを考慮すると

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \text{const} \quad (2.3)$$

となる。ここで、添え字 1 および 2 は、ある流管 (流線を束ねたもの) を考えたときの、上流側の断面 1 および下流側の断面 2 を表す。

さらに、ここでは定常問題を考える。従って、式 (2.1) の左辺第 1 項は 0 になる。また、左辺第 2 項は

$$\int \left(e_i + \frac{v^2}{2} \right) \rho u_j dA_j = \dot{m} \left[e_{i2} + \frac{1}{2} v_2^2 - e_{i1} - \frac{1}{2} v_1^2 \right] \quad (2.4)$$

となる。

次に、右辺第 1 項の検査体積になされる仕事は

$$\int u_i \sigma_{ij} dA_j = v_1 p_1 A_1 - v_2 p_2 A_2 \quad (2.5)$$

となる。応力 σ_{ij} は粘性力と圧力から構成されているが、ここでは簡単のため、圧力 p だけを考える。

また、検査体積内で加えられる熱量は、

$$- \int \vec{q} \cdot d\vec{A} = Q \times \dot{m} \quad (2.6)$$

となる。ここで、左辺のマイナスの符号は、検査体積内に入る量をプラスとするために付けられている。また、 Q は、流体の単位質量当たりに加えられる熱量である。以上より、

$$\dot{m} \left[e_{i2} + \frac{1}{2} v_2^2 - e_{i1} - \frac{1}{2} v_1^2 \right] = v_1 p_1 A_1 - v_2 p_2 A_2 + Q \times \dot{m} \quad (2.7)$$

が得られる。ここで、式 (2.7) の右辺第 1 項と第 2 項は、式 (2.3) を使って、

$$v_1 p_1 A_1 - v_2 p_2 A_2 = v_1 \rho_1 A_1 (p_1 / \rho_1) - v_2 \rho_2 A_2 (p_2 / \rho_2) = \dot{m} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) \quad (2.8)$$

と変形されるので、式 (2.7) は

$$\dot{m} \left[e_i + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 - e_{i1} - \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{1}{2} v_1^2 \right] = Q \times \dot{m} \quad (2.9)$$

となる。エンタルピー h の定義は

$$h = e_i + \frac{p}{\rho} \quad (2.10)$$

であるので、

$$\dot{m} \left[h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 - \left(h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right) \right] = Q \times \dot{m} \quad (2.11)$$

となる。

外部からなされる仕事 W や、外部からの熱量の出入り Q がない場合、1次元流を仮定すると、エネルギー式は簡単化され、流線に沿って以下の式が成立する。

$$h + \frac{1}{2} v^2 = H_0 = \text{一定} \quad (2.12)$$

この H_0 は、全エンタルピーあるいは澱みエンタルピー (stagnation enthalpy) と呼ばれる。つまり、その場で断熱的に流れの速度を 0 にしたときに得られるエンタルピーである。

完全ガスを仮定した場合には、この式は温度 T で以下のように書き変えることができる。

$$h = C_p T, \quad H_0 = C_p T_0 \quad (2.13)$$

ここで、 C_p は等圧比熱である。従って、式 (2.12) は

$$C_p T + \frac{1}{2} v^2 = C_p T_0 \quad (2.14)$$

となる。この式は、完全ガスの場合の澱み温度 T_0 の定義式となる。澱み温度とは、断熱的に流れの速度を 0 にしたとき、流れが示す温度である。

[注意] ちなみに、衝撃波を横切っても、この総温 T_0 は変化しない。つまり、衝撃波の前後で、 $T_{01} = T_{02}$ である。[注意終わり]

また、等圧比熱 C_p は、完全ガスの場合、

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \quad (2.15)$$

であるので、 $C_p T$ は

$$C_p T = \frac{\gamma R T}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (2.16)$$

となる。ここで、音速 a に関して、 $a^2 = \gamma R T$ の関係が使われている。これらの関係を使うと、式 (2.14) は

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} \quad (2.17)$$

となる。ここで、 a_0 は流れが静止したときの澱み流の音速である。定常流の場合は、ある流線に沿って H_0 は一定であるので、

$$H_0 = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2 = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V_\infty^2 = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \text{const} \quad (2.18)$$

となる。ここで、下付き添え字 $()_\infty$ は一様流での値である。飛行機が飛んでいる場合、飛行機の中の乗客から見たとき、飛行機に向かって来る流れの前方での値である。また、 a_* は、流れの速度と音速が等しくなる場合の値、つまり

$$v = a = a_* \quad (2.19)$$

である。このとき、局所マッハ数は $M = v/a = 1$ となる。

その他の関係式として、全エンタルピーが一定の式 (2.12) より、流れが到達できるであろう最高速度 V_{max} が計算できる。つまり、静エンタルピー h がすべて運動エネルギー $(1/2)v^2$ に食われたと考えれば、 $h = 0$ より、

$$V_{max} = (2H_0)^{1/2} = (2C_p T_0)^{1/2} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} R T_0 \right)^{1/2} \quad (2.20)$$

となる。つまり、流れに周りからエネルギーが加えられない場合、この速度が到達可能な最高速度となる。この式を見ると、 $\gamma \rightarrow 1$ になると、 V_{max} は無限大になる。

また、式 (2.18) と式 (2.20) から、最大速度を a_* で表わすことができる。

$$V_{max} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} a_* \quad (2.21)$$

この式を見て分かることは、最大速度は比熱比 γ に依存することである。通常の空気の比熱比は、 $\gamma = 1.4$ であるので、この最大速度は有限な値となる。一方、 $\gamma = 1$ の場合（後述する、極超音速流で出てくるニュートン法の場合に相当）、最大速度は無限大となる。このように圧縮性流体では、比熱比 γ は大変重要なパラメータである。

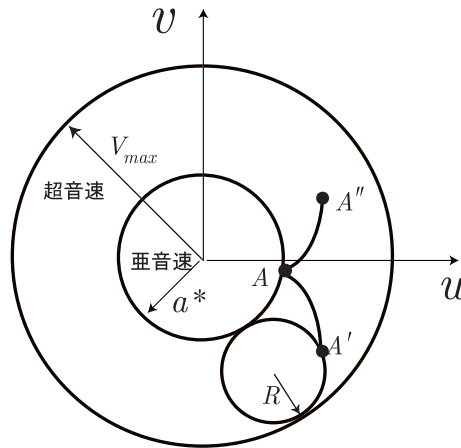


図 2.2: 臨界速度と最大速度

2.2 エネルギーが一定の場合の流れの諸量とマッハ数の関係

繰り返し述べるが、圧縮性流において、一番大事なパラメータはマッハ数である。ここでは、諸量の変化をマッハ数 M で表すことを考える。

2.2.1 温度とマッハ数の関係

全エンタルピーのエネルギー式 (2.14) を $C_p T$ で割ると、

$$1 + \frac{v^2}{2C_p T} = \frac{T_0}{T} \quad (2.22)$$

となる。完全ガスの場合

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \rightarrow C_p T = \frac{\gamma R T}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (2.23)$$

より、これを式 (2.22) に代入すると

$$1 + \frac{(\gamma - 1)v^2}{2a^2} = \frac{T_0}{T} \quad (2.24)$$

が得られる。つまり、

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \quad (2.25)$$

となる。ここで、 $M = v/a$ である。流線の局所局所での流れが持つ静温 T と、総温 T_0 の関係がマッハ数の関数として表されたことになる。この式は、基礎となる大事な式である。マッハ数が大きくなると、静温 T が低くなるのが表 2.1 から見て取れる。

2.2.2 音速とマッハ数の関係

式 (2.25) を利用すると、音速 a とマッハ数 M の関係も簡単に得られる。音速の自乗は温度に比例するので

$$\frac{a_0}{a} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2 \right]^{1/2} \quad (2.26)$$

マッハ数 (M)	温度比 (T/T_0)
0.3	0.98
0.5	0.95
0.8	0.89
1.0	0.83
1.5	0.69
2.0	0.56
2.5	0.44
3.0	0.36

表 2.1: マッハ数と温度比の関係

となる。ちなみに、これらの式 (2.25) と (2.26) は、断熱 (adiabatic) という条件さえ満たされれば成立する。つまり、粘性によるエントロピーの増大があっても、あるいは、途中で衝撃波が発生していても成立する関係式である。要するに、等エントロピー流でなくても成り立つ関係式である。

音速は、マッハ数とともに、減少する。これは、温度が、マッハ数とともに低下するためである。温度が下がると音速が減少するのは、大事な性質である。

2.3 エントロピーが一定の場合

これまでは、断熱条件 (外から流れに熱を加えない場合) での関係を調べてきた。ここでは、成立する条件の範囲をさらに狭くして、エントロピーが一定の場合を考える。諸量とマッハ数の関係を導出するが、具体的には、圧力 p と密度 ρ に関して、それらのマッハ数 M との関係を求める。

2.3.1 圧力とマッハ数の関係

等エントロピーの状態では、式 (1.85) より、以下の関係式が成立する。

$$\frac{p}{T^{\gamma/(\gamma-1)}} = const \quad (2.27)$$

従って、滞んでいる状態 (p_0, T_0) と流れている状態 (p, T) との間には

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.28)$$

の関係が成立する。この式に、温度とマッハ数の関係式 (2.25) を代入すると

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.29)$$

が得られる。この式の代表的な値を計算すると、表 (2.2) のようになる。 $M = 1$ まで加速すると、圧力が約半分にまで落ちる。

マッハ数 (M)	圧力比 (p/p_0)
0.3	0.94
0.5	0.84
0.8	0.66
1.0	0.53
1.5	0.27
2.0	0.13
2.5	0.059
3.0	0.027

表 2.2: マッハ数と圧力比の関係

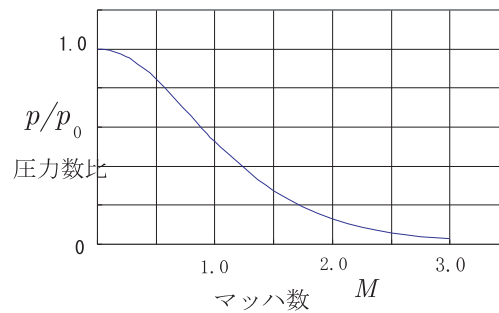


図 2.3: 圧力比とマッハ数の関係

2.3.2 密度とマッハ数の関係

圧力の場合と同様に、等エントロピーの状態では、密度と温度との間には、式 (1.85) より、以下の関係式が成立する。

$$\frac{\rho}{T^{1/(\gamma-1)}} = \text{const} \quad (2.30)$$

従って、滞んでいる状態 (ρ_0, T_0) と流れている状態 (ρ, T) との間には

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (2.31)$$

が成立する。温度とマッハ数の関係式 (2.25) を代入すれば

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(\gamma-1)} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2 \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (2.32)$$

となる。

(注意) 以上述べた流れの諸量は、マッハ数が増大するにつれ減少するが、圧力の減少が一番大きく、その次は密度、温度で、一番下がらないのが音速である。

p_0 や ρ_0 は、そこでの流れを等エントロピー的に速度を 0 にしたとき得られる圧力や密度である。

断熱流でも、エントロピーが一定でない流れでは、場所場所で、 p_0 や ρ_0 は変化する。つまり、それらの値は、摩擦や衝撃波が原因で、流れに沿って変化していく可能性がある。

2.4 音速点での値

音速点（流れの速度が音速と等しくなる点； $v = a$ ）での値は、音速点が臨界点であるために、重要な性質を持っている。音速点での、圧力 p^* 、密度 ρ^* 、温度 T^* 、音速 a^* は、激み状態での、圧力 p_0 、密度 ρ_0 、温度 T_0 、音速 a_0 を使って、以下の式で計算できる。これらは、式 (2.29)、式 (2.32)、式 (2.25)、式 (2.26) において、 $M = 1$ とおくことにより得られる。

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = 0.5283 \quad (2.33)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)} = 0.6339 \quad (2.34)$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} = 0.8333 \quad (2.35)$$

$$\frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/2} = 0.9129 \quad (2.36)$$

これらの式で、右辺最後の数値は空気の場合（ $\gamma = 1.4$ ）である。

流れが等エントロピー流の場合には、これらの音速での値（臨界値）は場所場所で皆同じになる。しかし、断熱流ではあるが、等エントロピー条件を満たさない流れの場合には、 a^* と T^* に関しては流れとともに一定であるが、 p^* と ρ^* に関しては流れとともに場所場所で変化する。

臨界速度、つまり、速度と音速が同じになるときの速度（スロートでの速度）を V^* とすれば、

$$V^* = a^* = (\gamma RT^*)^{1/2} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/2} a_0 = \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} RT_0 \right)^{1/2} \quad (2.37)$$

となる。ここで、式 (2.36) が使われている。

ちなみに、最大速度は式 (2.20) であるので、式 (2.37) を式 (2.20) で割ると、

$$\frac{V_*}{V_{max}} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \quad (2.38)$$

となる。

第3章 管内の等エントロピー流

ここでは、ダクトや管内の流れを単純化して1次元流れ(準1次元流れ)として解析する。ダクトの中心線が大きな曲率を持っていない場合や、ダクトの断面積が流れ方向に急激に変化しない場合に適用できる。この流れ解析では、単純化のため、ダクトの断面内での諸量の分布を無視する。つまり、ある断面内では、諸量はそれぞれ一定の値を持つという、平均値的な扱いをする。また、前述した、断熱流や等エントロピー流の関係式を、連続の式と結びつけて考える。

3.1 連続の方程式

ダクトの軸を x 軸として、点 x でのダクトの断面積を $A(x)$ 、流れの圧力を $p(x)$ 、密度を $\rho(x)$ 、速度を $V(x)$ とすると、定常流における質量保存は

$$\rho(x)V(x)A(x) = \text{const} \quad (3.1)$$

となる。この式(3変数の積)を x で微分すると

$$\frac{d\rho/dx}{\rho} + \frac{dV/dx}{V} + \frac{dA/dx}{A} = 0 \quad (3.2)$$

となる。全ての項に dx があるので、この式全体に dx を掛ければ

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.3)$$

となる。

一方、粘性を無視した1次元流れの運動方程式(オイラー方程式)は、

$$\rho V \frac{dV}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad (3.4)$$

となる。この式も全ての項に dx があるので、全体に dx を掛けると

$$\rho V dV = -dp \quad (3.5)$$

となる。これを变形すると

$$\frac{dp}{\rho} + V dV = 0 \quad (3.6)$$

となる。また、等エントロピー流を仮定すると、音速の式(1.9)から

$$dp = a^2 d\rho \quad (3.7)$$

が得られる。この式を式(3.6)に代入すると

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} + V dV = 0 \quad (3.8)$$

となる。この式を a^2 で割り、それを式 (3.3) に代入し整理すると、等エントロピー状態にあるダクト内流れに対する、速度 V と断面積 A の変化に関する関係式が得られる。

$$\frac{dV}{V} = \frac{dA}{A} \frac{1}{M^2 - 1} = -\frac{dp}{\rho V^2} \quad (3.9)$$

あるいは

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1) \quad (3.10)$$

である。ここで、 M はマッハ数で、 $M = V/a$ である。

この式を見ると、いろいろ面白い性質が分かる。特に、この式に含まれる $M^2 - 1$ が正か負かで、つまり、超音速流 ($M > 1$) か、亜音速流 ($M < 1$) かで性質が異なる。

流れを加速したいときには ($dV > 0$)

- $M > 1$ ($V > a$) であれば、 $dA > 0$ とする
- $M < 1$ ($V < a$) であれば、 $dA < 0$ とする

つまり、超音速流では、流れを加速するには断面をどんどん広げる。一方、亜音速流では、逆に、流れを加速するには断面を小さくする。

あるいは、断面積変化で整理すれば、以下のようなになる。

1) 亜音速流の場合 ($M^2 - 1 < 0$)

- $dA > 0$ の場合 (断面積を下流方向に増大させる場合):
 $dV < 0$ となるので、速度は流れ方向に減速する。また、この場合、式 (3.9) より $dp > 0$ となるので、圧力は増大する。このダクト (あるいは管) 形状は、亜音速ディヒューザーと呼ばれる。ディヒューザーとは、流れの速度を減速させて、圧力を上げるものである。別の言い方をすれば、運動エネルギーを圧力エネルギーに変換するものである。
- $dA < 0$ の場合 (断面積を下流方向に減少させる場合):
 $dV > 0$ となるので、速度は流れ方向に増速する。また、 $dp < 0$ であるので、圧力は減少する。このダクト (あるいは管) 形状は、亜音速ノズルと呼ばれる。ノズルとは、流れの速度を加速させて、圧力を下げるものである。つまり、圧力エネルギーを運動エネルギーに変換するものである。

2) 超音速の場合 ($M^2 - 1 > 0$)

- $dA > 0$ の場合 (断面積を下流方向に増大させる場合):
 $dV > 0$ となるので、速度は流れ方向に増速する。また、式 (3.9) より $dp < 0$ であるので、圧力は減少する。このダクト (あるいは管) 形状は、超音速ノズルと呼ばれる。
- $dA < 0$ の場合 (断面積を下流方向に減少させる場合):
 $dV < 0$ となるので、速度は流れ方向に減速する。また、 $dp > 0$ であるので、圧力は増大する。このダクト (あるいは管) 形状は、超音速ディヒューザーと呼ばれる。

以上から分かるように、亜音速流と超音速流ではその性質がまったく反対になる。例えば、超音速流では、断面積を流れ方向に大きくしていかないと、流れを増速できない。この性質は、ロケットのラバルノズルに応用されている。

臨界状態である $M = 1$ の場合は、式 (3.9) の分母が 0 になるので、このままでは dV が無限大となってしまう。これは現実的にはありえないことなので、これを防ぐには、 $dA = 0$ である必要がある。

$M=1$ つまり、流れの速度が音速に等しくなるのは、管の断面積が最小、あるいは、最大となるところで起こる。

管の途中で断面積が最小となる場合は、その点より左側は亜音速流で、右側は超音速流となる。従って、この場合には、自然に流れが加速されて行くことになり、現実として起こりうる。この例は、ラバルノズルである。

一方、断面積が最大となる場合には、もし、その左側が亜音速であれば、その最大位置で速度が最小となり、その結果、そのすぐ右側の領域も亜音速となる。従って、断面積最大位置で流れの速度は音速にはなりえない。同様にして、もし、左側の領域が超音速であれば、断面積最大のところで、最大の超音速の流れとなり、その右側はやはり超音速である。つまり、流れの速度は音速にはなりえない。

断面積が最小となるところでのみ、流れの速度が音速となる（そこで臨界状態が起こる）

以上のことから、流れを、静止状態から超音速にまで加速するためには、最初管の太さを細くしていき、 $M=1$ になったら、逆に管の径を太くしていけばよい。これがロケットなどで用いられているラバルノズル (Laval nozzle; convergent-divergent nozzle) である。

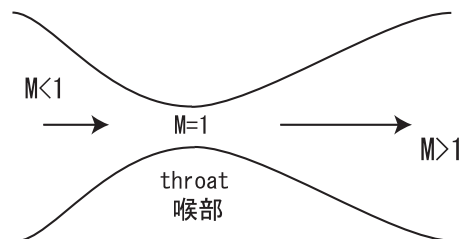


図 3.1: ラバルノズル

3.2 完全ガスの関係式

ここでは、管内の、ある場所での断面積 A と、そこでの流れのマッハ数 M を使って、完全ガスで、かつ、等エントロピー流の場合の、大事な関係式（代数的関係式）を導出する。

まず、管を流れる質量流量は、管のどの場所でも同じであるので、

$$\rho V A = \rho^* V^* A^* \quad \rightarrow \quad \frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* V^*}{\rho V} \quad (3.11)$$

となる。ここで、 V^* および A^* は、管内の流れの速度が音速となる点での速度、およびそこでの管の断面積である。

式 (3.11) に含まれる密度比は以下のように変形することができる。なお、この手法はよく使われる。

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho^* \rho_0}{\rho_0 \rho} = \left\{ \frac{2}{\gamma + 1} \left[1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) M^2 \right] \right\}^{1/(\gamma - 1)} \quad (3.12)$$

ここでは、式 (2.32) と式 (2.34) が使用されている。

マッハ数 (M)	断面積比 (A/A^*)
0.2	3.0
0.5	1.3
0.8	1.0
1.0	1.0
1.5	1.2
2.0	1.7
3.0	4.2

表 3.1: マッハ数と断面積比の関係

次に、速度比は以下のように変形される。

$$\frac{V^*}{V} = \frac{(\gamma RT^*)^{1/2}}{V} = \frac{(\gamma RT)^{1/2}}{V} \left(\frac{T^*}{T}\right)^{1/2} \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/2} \quad (3.13)$$

$$= \frac{1}{M} \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (3.14)$$

ここでは、式 (2.25) と式 (2.35) が使用されている。

式 (3.12) と式 (3.14) を式 (3.11) に代入すると、断面積比がマッハ数の関係式で得られる。

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2}{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \right]^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (3.15)$$

この式を見ると、左辺の断面積比 A/A^* が分かれば、右辺からマッハ数 M が決定される。この式をマッハ数を横軸としてプロットすると、断面積比は音速点で最小値 1 となり、音速から亜音速側に移行しても ($M < 1$)、また、超音速側に移行しても ($M > 1$)、音速点での断面積より大きくなる ($A/A^* > 1$) ことが分かる。

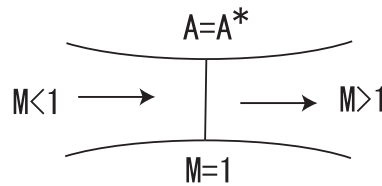


図 3.2: 管の断面積とマッハ数の関係

ちなみに、断面積 A_1 と断面積 A_2 を考え、それらを個々に式 (3.15) に代入し、それらを割り算すると、

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{M_2}{M_1} \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M_2^2} \right]^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (3.16)$$

となる。この式を使えば、 A_1 と M_1 が分かっているならば、断面積が A_2 の場所での、流れのマッハ数 M_2 が計算できる。

以上誘導してきた式では、式 (3.9) や式 (3.10) を使用していないことに注意する必要がある。

3.3 チョーク

ここでは、チョーク (choking) について勉強する。単位面積当たりの質量流量は、音速になる断面で最大となる。つまり、亜音速になっても、超音速になっても、そこでの単位面積当たりの質量流量は減少する。従って、同じ断面積であれば、音速状態のときに流量が最大となる。

式 (3.11) と式 (3.15) から

$$\frac{\rho V}{\rho^* V^*} = \frac{A^*}{A} = M \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2}{\frac{1}{2}(\gamma + 1)} \right]^{-(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (3.17)$$

が得られる。右辺の値は、 $M = 1$ のとき最大値 1 となる ($A/A^* \geq 1$ より)。

つまり、パイプの中を流体を流す場合、パイプの最小断面積の部分での流れの速度が音速に等しくなったとき、このパイプの質量流量は最大となる。それ以上、流量は増えない。この現象をチョークと呼ぶ。これを簡単にイメージするには、上流側の貯気槽の圧力は一定にしておいて、これにパイプを取り付け、パイプの下流端の圧力を下げていく場合を考える。パイプの下流端の圧力が、貯気槽の圧力と同じ場合には、パイプの中に流れは発生しない。さらに下流端での圧力を下げていくと、パイプの断面が一番小さいところで、流れの速度が音速に到達する。これ以上、下流端の圧力を下げても、パイプの中の流量は増加しない。これがチョークである。

パイプ内での流量をさらに増加させたい場合には、一つの方法は、スロート (最小断面) の断面積を大きくすることである。逆に、スロートの断面積を小さくすると、ダクト内の流量は減少する。最大流量 \dot{m}_{max} は、スロートの断面積 A^* で決まり、以下の式で計算される。

$$\dot{m}_{max} = \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)} A^* \rho_0 (RT_0)^{1/2} \quad (3.18)$$

$$= \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)} \frac{A^* p_0}{(RT_0)^{1/2}} \quad (3.19)$$

となる。ここで、 p_0 は貯気槽圧、 T_0 は貯気槽温度である。

つまり、パイプ内の最大流量は、スロートの断面積 A^* および総圧 (澱み圧力) p_0 に比例し、総温 (澱み温度) の平方根に逆比例する。スロートの断面積を一定にして、流量を増加させるには、タンク内の圧力を上げて、タンク内の温度を下げればよい。

ちなみに、式 (3.19) は、

$$\dot{m}_{max} = \rho^* V^* A^* \quad (3.20)$$

の右辺にある、 ρ^* に式 (2.34) を、 V^* に式 (2.37) を代入し、その後、完全ガスの状態方程式 $p_0/\rho_0 = RT_0$ を使えば得られる。

ダクト内の流れが超音速の場合、断面積比 A/A^* とマッハ数 M の関係を、式 (3.15) から計算し、表 3.2 に示す。マッハ数が大きくなると、相対的にスロートの断面積は激減する。例えば、マッハ数 10 の極超音速風洞のスロートは非常に小さい。

参考

例えば、ジェットエンジンでは、燃焼器 (combustor) の上流側に圧縮機 (速度を落として、圧力を上げる)、下流側にタービン (速度が上がり、圧力が下がる) が設置されている。圧縮機やタービンでは、多くの羽が周方向に並べられており、これらを一般に翼列と呼ぶ。圧縮機翼列とタービン翼列の違いは、翼列間流路の最小断面積が翼列の前縁に来るか、後縁に来るかである。圧縮機翼列では、最小断面積は前縁にあり、流入マッハ数を増すと、翼面上の局所マッハ数も増大し、ある流入マッハ数のとき、翼面上で速度が音速に到達する。このときの流入マッハ数が臨界マッハ数 (M_{1cr}) となる。これ

マッハ数 (M)	断面積比 (A/A^*)
1.0	1.0
1.5	1.18
2.0	1.69
2.5	2.64
3.0	4.23
4.0	10.7
5.0	25
8.0	190
10.0	536

表 3.2: 超音速での、マッハ数と断面積比の関係

以上流入マッハ数を増しても、通過する流量は増えないで、一定値となる。このときの状態をチョークと呼ぶ。圧縮機では、スロートは前縁側に存在する。ちなみに、タービン翼列では、流出マッハ数に基づいて臨界マッハ数 (M_{2cr}) が定義され、スロート部は翼列の後縁側に存在する。

第4章 平板上の流れ

平板上には境界層が発達する。圧縮性流れでは、境界層内で温度が上昇し、圧力は境界層の外側の流れとほぼ同じため、状態方程式に基づけば、密度が減少することになる。密度が減少した分を補うため、つまり質量流量を確保するため、境界層はより厚くなる。境界層の外側の流れのマッハ数が上がれば上がるほど、摩擦熱の発生が増大し、その結果、境界層内の温度は上昇する。

4.1 回復係数

速度が大きくなると、速度分布の境界層と、温度分布の境界層はお互いに干渉し合うようになる。

平板上の流れは、粘性散逸により温度が上昇する。この温度上昇を近似する式において使用されるのが回復係数 r (recovery factor) である。等温壁 (isothermal wall) の場合 ($T_w = const$) には、当然ながら壁面上での温度を議論する必要がないが、断熱壁 (adiabatic wall) の場合 ($(\partial T / \partial y)_w = 0$) には、通常、壁のところでの流体の温度 T_w は、回復係数 r を用いて以下の式で近似される。

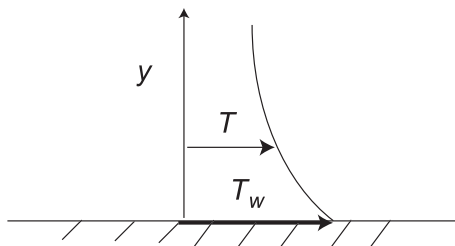


図 4.1: 壁面に垂直方向の温度分布 (等温壁の場合)

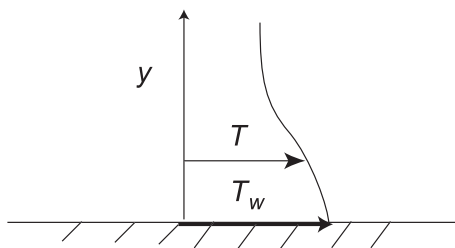


図 4.2: 壁面に垂直方向の温度分布 (断熱壁の場合)

$$T_w = T_\infty \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right) \quad (4.1)$$

あるいは、

$$\frac{(\Delta T)_{ad}}{T_\infty} = r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \quad (4.2)$$

ここで、

$$(\Delta T)_{ad} = T_w - T_\infty \quad (4.3)$$

である。

回復係数 r は、通常、

- 層流の場合： $0.825 \leq r \leq 0.865$
- 乱流の場合： $0.875 \leq r \leq 0.890$

である。

ちなみに、乱流の場合、マッハ数と壁面温度比の関係における代表的な値を表 4.1 に示す。ただし、

マッハ数 (M_∞)	壁面温度比 (T_w/T_∞)
2	1.7
3	2.6
5	5.5
8	12.4
10	18.8

表 4.1: マッハ数と壁面温度との関係 (断熱壁の場合)

回復係数 r は、 $r = 0.89$ としている。

この式からも分かるように、壁面温度はマッハ数の自乗で増大する。つまり、極超音速 ($M_\infty > 5$) で飛行する場合、壁面温度がかなり増大し、これに対する十分な対策が必要になる。例えば、高度 20,000m をマッハ数 $M_\infty = 5$ で飛行すると、そこでの静温は $T_\infty \simeq 220K$ であるので、壁面上での空気の温度は、 $T_w \simeq 1200K$ に達する。

4.2 圧縮性流での境界層方程式

4.2.1 層流の場合

流れが層流の場合の、圧縮性定常流の境界層方程式は以下のとおりである。

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (4.4)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.5)$$

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4.6)$$

最初の式が連続の式、2番目が運動方程式、3番目がエネルギー式である。このエネルギー式の誘導は、テキスト「粘性流体力学」の第4章熱境界層の4.3節の熱力学特性量の中に記述されている。ここでは、フルの方程式が記述されているので、 $u \gg v$, $x \gg y$ などの境界層近似を施せば、上式が得られる。

この他に、圧縮性流の方程式を解くためには、状態方程式が必要となる。熱的完全ガスの場合には、状態方程式は、

$$p = \rho RT \quad (4.7)$$

となる。ここで、 R は単位質量当りのガス定数である。空気の場合には、 $R = 287(\text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{K}) = 287(\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K})$ である。

4.2.2 乱流の場合

通常は乱流モデルを使わないと解くことができない。その場合、基本的な方程式の構成は層流の場合と類似しているが、粘性項が分子粘性 μ による項と、乱流粘性 μ_t による項から構成される。また、圧縮性流のように、密度が変化する場合には、ファールブ近似（質量平均）を使うと方程式が非圧縮性の場合と似た形ですっきりと書くことができる。その結果、非圧縮性流で用いた乱流モデルが同様な形で適用できる。

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{H}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{H}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} + (\mu + \mu_t) \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \quad (4.10)$$

ここで、 \tilde{u}, \tilde{v} は x, y 方向の平均速度成分、 \tilde{H} は平均全エンタルピーで

$$\tilde{H} = \bar{h} + \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \quad (4.11)$$

である。ここで、 \bar{h} は平均化された静エンタルピーで

$$\bar{h} = \bar{e}_i + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \quad (4.12)$$

である。

これらの式を解くためには、乱流モデルを使って、乱流粘性係数 μ_t と乱流プラントル係数 Pr_t を与える必要がある。

4.3 相似解

4.3.1 方程式の変換

テキスト「非圧縮性流体力学」の中の境界層のところで行ったように、支配方程式を (x, y) 座標表示から (ξ, η) 座標表示へ変換することを考える。

$$\xi = \int_0^x \rho_e \mu_e u_e dx, \quad \eta = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (4.13)$$

ここで、下付き添字 e は境界層外縁での値を示す。また、添字 e の付いた量は x (あるいは ξ) だけの関数である。

(参考) この変換は、Levy 変換 (Levy's transformation) から来ている。Levy 変換とは以下のものである。

$$\xi = \int_0^x \rho_e \mu_e u_e r_0^{2k} dx, \quad \eta = \frac{\rho_e u_e}{(2\xi)^{1/2}} \int_0^y r_0^k \rho / \rho_e dy \quad (4.14)$$

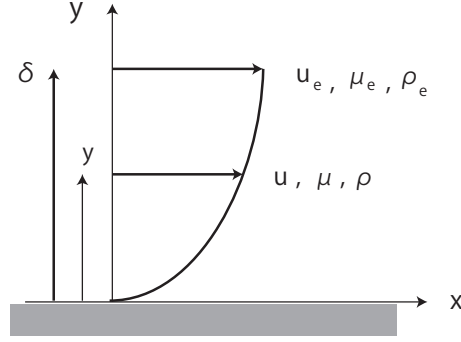


図 4.3: 圧縮性平板境界層における変数変換

ここで、 $k = 0$ は 2 次元物体 (平面物体) を、 $k = 1$ は軸対称物体を表わす。また、 r_0 は軸対称物体の軸に垂直な断面の半径である。

式 (4.13) を用いて、鎖則 (chain rule) から、微分の関係は以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \rho_e u_e \mu_e \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.16)$$

圧縮性の連続方程式 (4.4) を恒等的に満たすように流れ関数 ψ を定義する。

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v \quad (4.17)$$

4.3.2 運動方程式の変換

これらを境界層方程式における x 方向の運動方程式 (4.5) に代入すると、

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.18)$$

となる。ここで、圧力 p は境界層を垂直方向に横切って変化しないので、 $\partial p / \partial x = \partial p_e / \partial x$ である。

この式に対して、式 (4.15)、(4.16) を用いて、 (x, y) 座標から (ξ, η) 座標へ座標変換を施す。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \left(\rho_e u_e \mu_e \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \left(\rho_e u_e \mu_e \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ & = -\rho_e u_e \mu_e \frac{dp_e}{d\xi} + \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

この方程式に $\sqrt{2\xi}/u_e\rho$ を掛けると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(\rho_e u_e \mu_e \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \left(\rho_e u_e \mu_e \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ & = -\frac{\rho_e}{\rho} \sqrt{2\xi} \mu_e \frac{dp_e}{d\xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

となる。

ここで、新しい変数 f を導入する。

$$\frac{u}{u_e} = \frac{\partial f}{\partial \eta} = f' \quad (4.21)$$

相似性があれば、この f は η だけの関数となる。つまり、 $f = f(\eta)$ 。この先当分 f は ξ と η の関数、つまり、 $f = f(\eta, \xi)$ として考える。その結果、

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f' \frac{du_e}{d\xi} + u_e \frac{\partial f'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = u_e f'' \quad (4.22)$$

となる。

連続の方程式より、

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u \rightarrow \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \rho u = \rho u_e f' \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \sqrt{2\xi} f' \quad (4.23)$$

となる。この式を積分すれば、流れ関数 ψ は

$$\psi = \sqrt{2\xi} f \quad (4.24)$$

と考えることができる。

この式より、 ψ の微分は、

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} f + \sqrt{2\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \sqrt{2\xi} f' \quad (4.25)$$

となる。

これらの関係式を式 (4.20) に代入する。また、運動方程式 (4.5) において、境界層外縁 ($y = \delta$) では、ポテンシャル流にスムーズに接続するため、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0 \quad (4.26)$$

であるので、

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = - \frac{dp_e}{dx} \quad (4.27)$$

の関係が得られる。この関係も式 (4.20) に代入して、整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (C f'') + f f'' = \frac{2\xi}{u_e} \left\{ (f')^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right\} \frac{du_e}{d\xi} + 2\xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (4.28)$$

が得られる。ここで、

$$C = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e} \quad (4.29)$$

である。

この式の中で、 ρ_e/ρ が存在するが、境界層の中では境界層に垂直方向に圧力は一定であり、その結果、 $p = p_e$ となる。この式と状態方程式 $p = \rho RT$ を使って、

$$p = p_e \rightarrow \rho RT = \rho_e RT_e \rightarrow \frac{\rho_e}{\rho} = \frac{T}{T_e} = \frac{C_p T}{C_p T_e} = \frac{h}{h_e} \quad (4.30)$$

となる関係式が得られる。ここで、 C_p は等圧比熱、 h はエンタルピー (静エンタルピー; static enthalpy) である。

次で述べるエネルギー式では、変数 g が

$$g = \frac{h}{h_e} \quad (4.31)$$

として使用される。この変数を使えば、運動方程式 (4.28) は

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(Cf'') + ff'' = \frac{2\xi}{u_e} \{(f')^2 - g\} \frac{du_e}{d\xi} + 2\xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (4.32)$$

と書くことができる。

さらに、右辺第1項の圧力勾配の項は、

$$\frac{\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} = C_1(\text{一定値}) \rightarrow \frac{du_e/u_e}{d\xi/\xi} = C_1 \rightarrow \ln u_e = C_1 \ln \xi \quad (4.33)$$

であれば、圧力勾配のある場合でも相似解が存在する可能性がある。つまり、

$$u_e = \xi^{C_1} \quad \text{一般には} \quad u_e = \xi^n \quad (4.34)$$

の場合で、外部流が座標 ξ (あるいは x) のべき乗の場合である。非圧縮性流でも同様なことが言えた。

相似解が存在する場合には、 $f = f(\eta)$ であるので、式 (4.32) は、

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(Cf'') + ff'' = \frac{2\xi}{u_e} \{(f')^2 - g\} \frac{du_e}{d\xi} = C_1 \{(f')^2 - g\} \quad (4.35)$$

となる。圧力勾配のない流れ (平板上の流れ) では、 $du_e/d\xi = 0$ であるので、

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(Cf'') + ff'' = 0 \quad (4.36)$$

となる。

4.3.3 エネルギー方程式の変換

エネルギー式は、式 (4.6) より、

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4.37)$$

となる。

ここで、

$$g = g(\xi, \eta) = \frac{h}{h_e} \quad (4.38)$$

とおく。

ここで、微分の変換を計算する。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \rho_e u_e \mu_e \frac{\partial h_e g}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h_e g}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial h_e g}{\partial \eta} \quad (4.39)$$

式 (4.37) の左辺は、

$$\frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(\rho_e u_e \mu_e \frac{\partial h_e g}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial h_e g}{\partial \eta} \right) - \left(\rho_e u_e \mu_e \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial h_e g}{\partial \eta} \quad (4.40)$$

この式を展開した時の第2項と第4項はキャンセルする。また、 $\psi = \sqrt{2\xi} f$ を代入すると、左辺は、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{u_e \rho}{\sqrt{2\xi}} \frac{\partial \sqrt{2\xi} f}{\partial \eta} \cdot \rho_e u_e \mu_e \frac{\partial h_e g}{\partial \xi} - \rho_e u_e \mu_e \frac{\partial \sqrt{2\xi} f}{\partial \xi} \cdot \frac{u_e h_e \rho}{\sqrt{2\xi}} g' \\ &= u_e^2 \rho \rho_e \mu_e f' \frac{\partial h_e g}{\partial \xi} - \frac{\rho \rho_e u_e^2 \mu_e h_e}{\sqrt{2\xi}} g' \frac{\partial \sqrt{2\xi} f}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (4.41)$$

となる。

一方、式 (4.37) の右辺は以下ようになる。右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned}
 u \frac{dp_e}{dx} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dp_e}{dx} \\
 &= \frac{1}{\rho} \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \left(\rho_e u_e \mu_e \frac{\partial p_e}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial p_e}{\partial \eta} \right) \\
 &= \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \rho_e u_e \mu_e \left(-\rho_e u_e \frac{du_e}{d\xi} \right) \\
 &= -\frac{\rho_e^2 u_e^3 \mu_e}{\sqrt{2\xi}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{du_e}{d\xi} \\
 &= -\rho_e^2 u_e^3 \mu_e f' \frac{du_e}{d\xi}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

となる。ここでは、境界層外縁における運動方程式である

$$dp_e = -\rho_e u_e du_e \tag{4.43}$$

と、流れ関数 ψ に対する式 (4.24) が使われている。

また、右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial}{\partial \eta} \right) T \\
 &= \frac{u_e^2}{2\xi} \rho \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \rho \frac{\partial}{\partial \eta} g \frac{h_e}{c_p} \right) \\
 &= \frac{u_e^2}{2\xi} \rho \frac{h_e}{c_p} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \rho \frac{\partial}{\partial \eta} g \right)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

ここで、温度 T に関して以下の関係が使われた。

$$T = \frac{h}{c_p} = \frac{h}{h_e} \frac{h_e}{c_p} = g \frac{h_e}{c_p} \tag{4.45}$$

さらに、粘性散逸項である右辺第 3 項は、

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \mu \left(\frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \rho \frac{\partial}{\partial \eta} f' u_e \right)^2 = \mu \left(\frac{u_e^2 \rho}{\sqrt{2\xi}} f'' \right)^2 \tag{4.46}$$

となる。

以上まとめると、右辺は以下ようになる。

$$\text{右辺} = -\rho_e^2 u_e^3 \mu_e f' \frac{du_e}{d\xi} + \frac{u_e^2}{2\xi} \frac{\rho h_e}{C_p} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \rho \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) + \mu \left(\frac{u_e^2 \rho}{\sqrt{2\xi}} f'' \right)^2 \tag{4.47}$$

左辺 (4.41) と右辺 (4.47) を等しいとおくと、

$$\begin{aligned}
 &u_e^2 \rho \rho_e \mu_e f' \frac{\partial h_e g}{\partial \xi} - \frac{\rho \rho_e u_e^2 \mu_e h_e}{\sqrt{2\xi}} g' \frac{\partial \sqrt{2\xi} f}{\partial \xi} \\
 &= -\rho_e^2 u_e^3 \mu_e f' \frac{du_e}{d\xi} + \frac{u_e^2}{2\xi} \frac{\rho h_e}{C_p} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k \rho \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) + \mu \left(\frac{u_e^2 \rho}{\sqrt{2\xi}} f'' \right)^2
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

この式をさらに展開していく。右辺第 2 項の一部は、

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (k \rho g') = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{k \rho}{\rho_e \mu_e} \times \rho_e \mu_e g' \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e} \times \frac{k \rho}{\rho \mu} \times \rho_e \mu_e g' \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(C \times \frac{k}{\mu C_p} \times C_p \rho_e \mu_e g' \right) \\
&= C_p \rho_e \mu_e \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{C}{P_r} g' \right)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

となる。従って、右辺第2項は、

$$\frac{u_e^2 \rho h_e}{2\xi C_p} \frac{\partial}{\partial \eta} (k \rho g') = \frac{u_e^2 \rho_e \mu_e h_e \rho}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{C}{P_r} g' \right) \tag{4.50}$$

となる。この係数

$$\frac{u_e^2 \rho_e \mu_e h_e \rho}{2\xi} \tag{4.51}$$

で、式(4.48)を割って整理すると、

$$\frac{2\xi}{h_e} f' \frac{\partial h_e g}{\partial \xi} - \sqrt{2\xi} g' \frac{\partial \sqrt{2\xi} f}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{C}{P_r} g' \right) - 2\xi \frac{u_e}{h_e} g f' \frac{du_e}{d\xi} + \frac{u_e^2}{h_e} C (f'')^2 \tag{4.52}$$

となる。左辺第1項と第2項を展開して整理すると、

$$\frac{2\xi}{h_e} \frac{dh_e}{d\xi} f' g + 2\xi f' \frac{\partial g}{\partial \xi} - g' f - 2\xi g' \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{C}{P_r} g' \right) - 2\xi \frac{u_e}{h_e} g f' \frac{du_e}{d\xi} + \frac{u_e^2}{h_e} C (f'')^2 \tag{4.53}$$

となる。

相似性がある場合には、 $f = f(\eta)$ 、 $g = g(\eta)$ であるので、

$$\frac{2\xi}{h_e} \frac{dh_e}{d\xi} f' g - g' f = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{C}{P_r} g' \right) - 2\xi \frac{u_e}{h_e} g f' \frac{du_e}{d\xi} + \frac{u_e^2}{h_e} C (f'')^2 \tag{4.54}$$

となる。さらに、平板上の境界層では、 $dh_e/d\xi = 0$ 、 $du_e/d\xi = 0$ より、エネルギー式は

$$-g' f = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{C}{P_r} g' \right) + \frac{u_e^2}{h_e} C (f'')^2 \tag{4.55}$$

となる。

4.3.4 平板上の圧縮性流れの相似解

平板上の圧縮性流れの相似解は、以下の2個の方程式を解くことによって求められる。これには上で誘導した式を用いる。平板の場合の運動方程式には、式(4.36)を、エネルギー式には、式(4.55)を使用する。

$$(cf'')' + ff'' = 0 \tag{4.56}$$

$$\left(\frac{c}{P_r} g' \right)' + fg' + c \frac{u_e^2}{h_e} (f'')^2 = 0 \tag{4.57}$$

ここで、 $f = f(\eta)$ 、 $g = g(\eta)$ で、 $()'$ は相似変数 η での微分を表す。つまり、 $()' = d()/d\eta$ である。また、

$$\psi = \sqrt{2\xi} f, \quad \frac{u}{u_e} = f', \quad g = \frac{h}{h_e}, \quad c = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e} \tag{4.58}$$

である。下付き添え字 $()_e$ は境界層外縁での値を示す。

ξ は、 (x, y) 座標から (ξ, η) 座標に座標変換する時の座標で、元々は

$$\xi = \int_0^x \rho_e u_e \mu_e dx, \quad \eta = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (4.59)$$

である。平板の場合には簡略化されて、

$$\xi = \rho_e u_e \mu_e x, \quad \eta = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (4.60)$$

となる。

熱的にも熱量的にも完全なガスを考えると、式 (4.57) に含まれる u_e^2/h_e の項は、

$$\frac{u_e^2}{h_e} = \frac{u_e^2}{C_p T_e} = \frac{u_e^2}{\frac{\gamma}{\gamma-1} R T_e} = \frac{(\gamma-1)u_e^2}{\gamma R T_e} = \frac{(\gamma-1)u_e^2}{a_e^2} = (\gamma-1)M_e^2 \quad (4.61)$$

となる。ここで、 M_e は境界層外縁での主流のマッハ数である。さらに、粘性係数 μ をべき乗則で近似すると、

$$\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{T}{T_e}\right)^n \quad (4.62)$$

となる。ここで、 $0.5 < n < 1.0$ である。これを使うと、 c は、

$$c = \frac{\rho}{\rho_e} \frac{\mu}{\mu_e} = \frac{T_e}{T} \left(\frac{T}{T_e}\right)^n = \left(\frac{T}{T_e}\right)^{n-1} \quad (4.63)$$

となる。ここで、以下の関係が使われている。境界層の中では、境界層を横切る方向 (y 方向) に圧力は変化しないので ($p = p_e$)、熱的完全ガスの式より、

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad \frac{p_e}{\rho_e} = RT_e \quad \rightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_e} = \frac{T_e}{T} \quad (4.64)$$

となる。

式 (4.63) は、完全ガスの場合、さらに変形される。

$$c = \left(\frac{T}{T_e}\right)^{n-1} = \left(\frac{C_p T}{C_p T_e}\right)^{n-1} = \left(\frac{h}{h_e}\right)^{n-1} = (g)^{n-1} \quad (4.65)$$

ここで、 h はエンタルピーである。

以上を考慮すると、解くべき方程式 (4.57) は以下ようになる。

$$(cf'')' + ff'' = 0 \quad (4.66)$$

$$\left(\frac{c}{Pr}g'\right)' + fg' + (\gamma-1)M_e^2(g)^{n-1}(f'')^2 = 0 \quad (4.67)$$

境界条件は、

$$\eta = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad g'(0) = 0 \quad (\text{断熱壁の場合}) \quad (4.68)$$

あるいは

$$\eta = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad g(0) = g_w \quad (\text{等温壁の場合}) \quad (4.69)$$

$$\eta = \infty \quad \rightarrow \quad f'(\infty) = 1, \quad g(\infty) = 1 \quad (4.70)$$

4.3.5 平板境界層の数値計算法

式(4.67)は、連立の1階の偏微分方程式に直すことができる。

$$f' = m \quad (4.71)$$

$$m' = \frac{w}{c} \quad (4.72)$$

$$w' = -f \frac{w}{c} \quad (4.73)$$

$$g' = \frac{Pr}{c} x \quad (4.74)$$

$$x' = -f \frac{Pr}{c} x - (\gamma - 1) M_e^2 w \quad (4.75)$$

解ベクトル \vec{q} は、 $\vec{q} = (f, m, w, g, x)$ である。ちなみに、式(4.65)から c は g の関数である。これを4次精度のルンゲクッタ法で $\eta = 0$ から数値的に解けばよい。

断熱壁の場合には、

$$w(0) = C1, \quad g(0) = C2 \quad (4.76)$$

を最初だけ任意に与えて(例えば、 $C1 = 0.5$, $C2 = 0.5$)、 $\eta \rightarrow \infty$ で(例えば、 $\eta = 10$)、式(4.70)の境界条件を満たすように繰り返し計算で調整する(このとき非線型方程式を解くのに使われるニュートン法を使用すれば3回程度で収束する)。

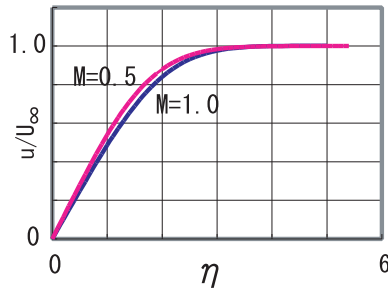


図 4.4: 平板上の速度分布 (断熱の場合)

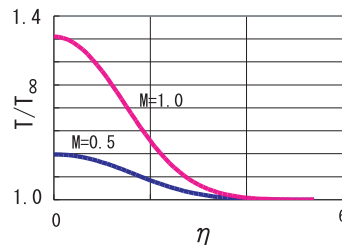


図 4.5: 平板上の温度分布 (断熱の場合)

この図から分かるように、 M 数が増加していくと、境界層は厚くなって行く。この理由は、境界

層内で温度が上昇し、その結果、密度が下がるためである。同じ質量流量を維持するためには、より外側まで巻き込む必要がある。

温度分布を見ると、壁で断熱の場合、 $M = 1$ の場合には、外側の一樣流の温度の4割分増加している。ちなみに、散逸 (dissipation; 運動エネルギーが熱エネルギーに変化) は M^2 で増加する。低速流のような M 数が小さいときには、散逸現象はほとんど現れなく無視できるが、 M 数が増加すると、その寄与は増大する。これが壁面で温度が上昇する理由である。

4.3.6 極超音速流中の平板流れ

一方、極超音速流の場合を計算してみよう。ここでは、名古屋大学の衝撃風洞 (マッハ数 $M=8$) に平板が置かれ、その上に形成される境界層について考えてみる。

名古屋大学の衝撃風洞のテストセクションでの流れ (一樣流) は下記のような値を持つ。

$$M_\infty = 8.1, \quad P_{o\infty} = 4.0 \text{MPa}, \quad T_{0\infty} = 900 \text{K}, \quad P_\infty = 370.6 \text{Pa}, \quad T_\infty = 63.73 \text{K} \quad (4.77)$$

また、この計算では、平板上の温度 T_w は等温 (isothermal) で、 $T_w = 280 \text{K}$ としている。さらに、粘性係数の温度依存は、べき乗近似式を用いて、 $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^{0.6}$ としている。通常は、この指数 n として、 $n = 2/3$ が用いられる。

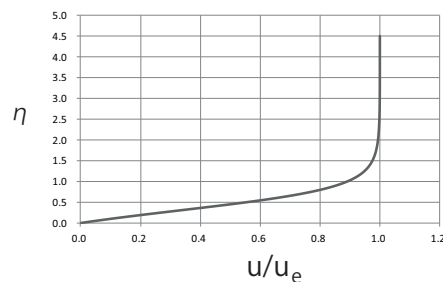


図 4.6: 壁面に垂直方向の速度分布 (等温壁の場合): $M=8$, $T_w/T_e = 4.4$; 縦座標は相似変数 η

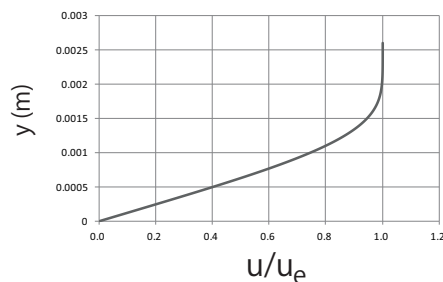


図 4.7: 図 4.6 において縦座標を y (m) に換算し、かつ $x=120\text{mm}$ の場合

縦軸を相似変数 η から実際の長さ y に換算する。これにより、境界層の厚さを見積もることが出来る。式 (4.13) より、

$$\eta = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy = \frac{u_e \rho_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy = \frac{u_e \rho_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \frac{1}{g} dy \quad (4.78)$$

と変形できる。ここでは以下の関係式が使用されている。式(4.38)は、

$$g = \frac{h}{h_e} = \frac{C_p T}{C_p T_e} = \frac{T}{T_e} = \frac{p/\rho R}{(p/\rho R)_e} = \frac{\rho_e}{\rho} \quad (4.79)$$

と変形できる。この変形では、熱量的完全ガスの場合の、境界層内の圧力関係式 ($p = p_e$) が用いられている。

式(4.78)の微小変位をとると、

$$\Delta\eta = \frac{u_e \rho_e}{\sqrt{2\xi}} \frac{\Delta y}{g(\eta)} \quad (4.80)$$

となる。従って、 y は、

$$y = \frac{\sqrt{2\xi}}{u_e \rho_e} \int_0^\eta g(\eta) d\eta \quad (4.81)$$

から計算できる。

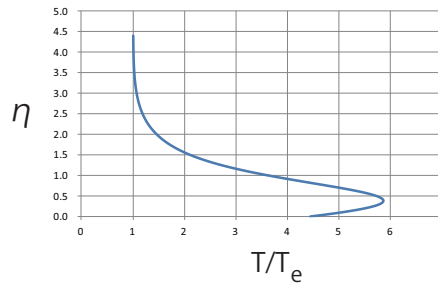


図 4.8: 壁面に垂直方向の温度分布 (等温壁の場合: $M=8$, $T_w/T_e = 4.4$)

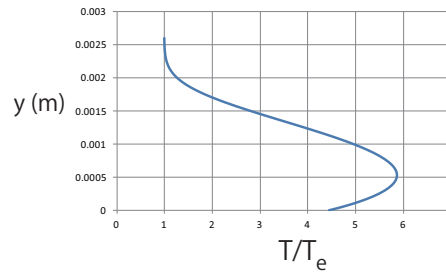


図 4.9: 図 4.8 において縦座標を y (m) に換算し、かつ $x=120\text{mm}$ の場合

第5章 圧力係数

ここでは、圧力係数の求め方について勉強する。圧力係数とは、圧力を無次元化したものであり、圧力係数の定義は

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2} \quad (5.1)$$

である。ここで、 p は物体表面上での局所の圧力、 p_∞ 、 ρ_∞ 、 V_∞ はそれぞれ一様流の圧力、密度、速度である。この圧力係数の定義式 (5.1) は、非圧縮性流でも圧縮性流でも同じである。

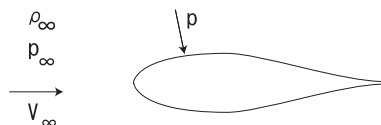


図 5.1: 圧力係数

圧縮性流の場合には、この式を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{p_\infty}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \\ &= \frac{2\gamma(p_\infty/\rho_\infty)}{\gamma V_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \\ &= \frac{2}{\gamma} \frac{a_\infty^2}{V_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \\ &= \frac{2}{\gamma} \frac{1}{M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ここでは以下の音速の式（完全ガスの場合）が使用されている。

$$a_\infty^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \quad (5.3)$$

風洞実験で模型まわりの圧力が圧力変換器を用いて採取できれば、式 (5.2) から圧力係数が求められ、これに基づいて図にプロットできる。

5.1 微小擾乱流における圧力係数

物体表面上での流れの速度 V を、一様流 V_∞ とそこからのずれ速度 (u, v, w) に分解する。つまり、

$$\vec{V} = \vec{V}_\infty + \vec{q} \quad (5.4)$$

ここで、擾乱速度 \vec{q} は

$$\vec{q} = (u, v, w) \quad (5.5)$$

である。

従って、

$$\vec{V} = (V_\infty + u, v, w), \quad V^2 = (V_\infty^2 + u)^2 + v^2 + w^2 \quad (5.6)$$

となる。ここでは物体周りの流れが一様流からさほど変化しないと考える。つまり、

$$u, v, w \ll V_\infty \quad (5.7)$$

これをエネルギー式 (2.18) つまり全エンタルピーが一定の式に代入すると

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \{(V_\infty^2 + u)^2 + v^2 + w^2\} = \frac{a_\infty^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} V_\infty^2 \quad (5.8)$$

となる。式 (5.8) を a_∞^2 で割ると

$$\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{a}{a_\infty} \right)^2 + \frac{(V_\infty + u)^2 + v^2 + w^2}{2a_\infty^2} = \frac{1}{\gamma-1} + \frac{M_\infty^2}{2} \quad (5.9)$$

となり、整理すると

$$\left(\frac{a}{a_\infty} \right)^2 = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 - (\gamma-1) \frac{(V_\infty + u)^2 + v^2 + w^2}{2a_\infty^2} \quad (5.10)$$

となる。

ここで等エントロピーの関係式を考える。圧力 p と温度 T に関して、等エントロピーの関係式は

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (5.11)$$

となる。また、温度と音速の間には

$$\frac{T}{T_\infty} = \left(\frac{a}{a_\infty} \right)^2 \quad (5.12)$$

の関係がある。

式 ((5.12)) を使って、式 (5.10) を式 (5.11) に代入すると

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 - (\gamma-1) \frac{(V_\infty^2 + u)^2 + v^2 + w^2}{2a_\infty^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (5.13)$$

$$= \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left\{ 2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{V_\infty^2} \right\} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (5.14)$$

$$\simeq 1 - \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 \left\{ 2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{V_\infty^2} \right\} \quad (5.15)$$

が得られる。最後の式は、近似式 (5.7) を用いて、テーラー展開に基づいて近似されている。これを式 (5.2) に代入することにより

$$C_p = - \left\{ \frac{2u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{V_\infty^2} \right\} \quad (5.16)$$

が得られる。

通常、

- 扁平な物体の場合には

$$C_p \simeq - \frac{2u}{V_\infty} \quad (5.17)$$

- 軸対称物体の場合には

$$C_p \simeq -\frac{2u}{V_\infty} - \frac{v_r^2}{V_\infty^2} \quad (5.18)$$

が用いられる。ここで、 v_r は軸対称物体中心軸 x に垂直な断面内における、物体表面上の半径方向速度成分である。

いずれにせよ、これらの式は、非圧縮性流の圧力係数 $C_p = -2u/V_\infty$ と同じ形となる。

5.2 臨界圧力係数

物体表面に沿って流れが加速し、流れの速度が音速と一致したときの圧力係数を臨界圧力係数 C_p^* と呼ぶ。つまり、この圧力係数より小さい流れの領域は超音速の流れ場となる。臨界圧力係数は以下のようにして得られる。式 (5.2) から圧力係数は、

$$C_p = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_0} \cdot \frac{p_0}{p_\infty} - 1 \right) \quad (5.19)$$

と変形される。ここで、静圧 p と総圧 p_0 の関係は式 (2.29) より

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (5.20)$$

となる。この式で p の代わりに p_∞ を代入すると

$$\frac{p_0}{p_\infty} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_\infty^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (5.21)$$

となる。式 (5.20),(5.21) を式 (5.19) に代入すると

$$C_p = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{M_\infty^2} \left\{ \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_\infty^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right\} \quad (5.22)$$

となる。

臨界圧力とは局所的に流れの速度が音速に等しくなる場所での圧力であるので、この式で $M = 1$ を代入すると、臨界圧力係数 C_p^* が得られる。

$$C_p^* = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{M_\infty^2} \left\{ \left[\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_\infty^2}{\frac{1}{2}(1 + \gamma)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right\} \quad (5.23)$$

問題： $M_\infty = 0.6, 0.7, 0.8$ での臨界圧力係数を求めよ。

5.3 澱点圧力係数

物体表面に流れが平行に流れ粘性の影響で物体表面で速度が 0 になるのではなく、流れが物体表面に垂直にぶつかり、せき止め効果により速度が 0 になる点を澱み点 (stagnation point) と呼ぶ。非圧縮性流ではこのときの圧力係数は 1 であるが、圧縮性流の場合には澱点圧力は 1 をオーバーする。

これに対する式は以下のようにして誘導できる。圧力係数の定義式(5.1)で、圧力 p を滞り圧力 p_0 とおくと、滞り圧力係数 $C_{p_{st}}$ は、

$$\begin{aligned} C_{p_{st}} &= \frac{p_0 - p_\infty}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2} \\ &= \frac{p_\infty \left(\frac{p_0}{p_\infty} - 1 \right)}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2} \\ &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

となる。ここで、式(5.21)が使用されている。

近似として、 $M_\infty \ll 1$ の場合、テーラー展開により、

$$\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \simeq 1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 + \frac{\gamma}{8} M_\infty^4 + \dots \quad (5.25)$$

となる。これを式(5.24)に代入すると、

$$C_{p_{st}} \simeq 1 + \frac{1}{4} M_\infty^2 \quad (5.26)$$

となる。つまり、滞り圧力係数 $C_{p_{st}}$ はマッハ数 M_∞ とともに増加する。この式からも、圧縮性流では、圧力係数が1を超える場合もあることが分かる。

問題： $M_\infty = 0.6, 0.7, 0.8$ での滞り点圧力係数を求めよ。

5.4 臨界マッハ数

一様流の速度を増加させた時、一様流があるマッハ数になった時、翼の上で局所的にマッハ数が1になる時、そのときの一様流のマッハ数を臨界マッハ数 (critical Mach number) と呼ぶ。これは以下の式から計算できる。

$$(M_{\infty_{cr}}^2)^3 - (3 - K^2)(M_{\infty_{cr}}^2)^2 + 3M_{\infty_{cr}}^2 - 1 = 0 \quad (5.27)$$

ここで、 K は以下のように定義される。

$$K = (\gamma + 1) \left(\frac{u_i}{V_\infty} \right)_{max} \simeq (\gamma + 1) \left(-\frac{C_{p_i}}{2} \right)_{max} \quad (5.28)$$

ここで添え字 max は、その値が最大のところが最初に音速に達するという意味である。

以下にこの式の誘導を示す。全エンタルピーが一定の式

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} V^2 = \frac{a_\infty^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} V_\infty^2 \quad (5.29)$$

より、

$$a^2 = a_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2} V_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2} V^2 \quad (5.30)$$

これを使ってマッハ数 M は以下のように計算される。

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{a_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2} V_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2} V^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} \cdot \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} - \frac{\gamma-1}{2} \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2} \\
&= \frac{M_\infty^2 \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2} \quad (5.31)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 = \frac{(V_\infty + u)^2 + v^2}{V_\infty^2} = \frac{V_\infty^2 + 2V_\infty u + u^2 + v^2}{V_\infty^2} \simeq 1 + 2\frac{u}{V_\infty} \quad (5.32)$$

これを式 (5.31) に代入すると

$$M^2 \simeq \frac{M_\infty^2 \left(1 + 2\frac{u}{V_\infty}\right)}{1 - (\gamma - 1)M_\infty^2 \frac{u}{V_\infty}} \quad (5.33)$$

上述した圧力係数の近似式と、後述する圧縮性流と非圧縮性流の関係式である Prandtl-Glauert の法則より

$$\frac{u}{V_\infty} = -\frac{C_p}{2} = -\frac{1}{2} \frac{C_{p_i}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left(\frac{u}{V_\infty}\right)_i \quad (5.34)$$

ここで、下付き添え字 i は非圧縮性流での値を示す。

式 (5.34) を式 (5.33) に代入すると

$$M^2 = M_\infty^2 \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left(\frac{u}{V_\infty}\right)_i}{1 - (\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left(\frac{u}{V_\infty}\right)_i} \quad (5.35)$$

臨界マッハ数を求めるためには、この式で、 $M = 1$ を代入すればよい。例えば、翼面上のある点でマッハ数が 1 になる。

$$1 = M_\infty^2 \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left(\frac{u}{V_\infty}\right)_i}{1 - (\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left(\frac{u}{V_\infty}\right)_i} \quad (5.36)$$

この式を整理すると式 (5.27) が得られる。

問題 翼型 NACA0012 では、低速度で迎角 0 の場合、翼前縁からの距離が $x/C = 0.12$ (C は翼弦長) で速度が最大になり、そのときの最大値は $V/V_\infty = 1.19$ となる。これを使って臨界マッハ数を計算しなさい。

第6章 薄翼理論

ここでは、飛行機の翼のように翼弦長に比べて、厚みが小さい場合の物体周りの流れを調べる。流れとして、ポテンシャル流を考える。ポテンシャル流は、非圧縮性流のみならず、圧縮性流にも存在することに注意する必要がある。ポテンシャル流とは渦度が無い流れである。ただ、圧縮性流になると、ポテンシャルの方程式は非線形となる。これが、非圧縮性流と違う点である。

この非線形方程式は、厚みが薄いとして、線形化できる。結果から述べると、薄翼理論では以下の式が成立する。

$$(1 - M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (6.1)$$

ここで、各量の添え字 $(\)_{xx}, (\)_{yy}, (\)_{zz}$ はそれぞれの変数での2階微分を表す。この式は、 $M_\infty = 1$ では左辺第一項の係数が0になるので適用できない。従って、音速より小さいマッハ数 ($M < 1$) で成り立つ。ただ、注意することは、 $M > 1$ となる超音速流でもこの式は適用できる(ただし極超音速流は渦が発生するので適用できない)。その場合は、左辺第1項の符号が変わるので、全体に -1 を掛けて

$$(M_\infty^2 - 1)\phi_{xx} - \phi_{yy} - \phi_{zz} = 0 \quad (6.2)$$

とする。

[参考]

式(6.1)で、 $M_\infty = 0$ とおけば、

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (6.3)$$

となる。これは確かに非圧縮性流のポテンシャル方程式である。(非圧縮性流体力学のテキスト参照)

6.1 非線形ポテンシャル方程式

線形化された上式を誘導するためには、先ず、圧縮性流における、近似されていないポテンシャル流の方程式 (full potential equation) が必要となる。それは、以下のように書ける。

$$(a^2 - \Phi_x^2)\Phi_{xx} + (a^2 - \Phi_y^2)\Phi_{yy} + (a^2 - \Phi_z^2)\Phi_{zz} - 2(\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_y\Phi_z\Phi_{yz} + \Phi_z\Phi_x\Phi_{zx}) = 0 \quad (6.4)$$

である。ちなみに、ここでの Φ は全体の速度ベクトル (擾乱の速度ベクトル ϕ ではない) に対するもので、以下のように定義できる。

$$V_x = \Phi_x, \quad V_y = \Phi_y, \quad V_z = \Phi_z \quad (6.5)$$

ただし、これだけでは速度ポテンシャル Φ を解くことができない。これを解くためには、エネルギー式、つまり全エンタルピー一定の式 (2.18) から、音速を求める必要がある。

$$\frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2}V_\infty^2 + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} \quad (6.6)$$

ここで、 $(\)_{\infty}$ は翼表面を通る流線において無限上流での値、つまり一様流での値を示す。このようにして、式 (6.4) と式 (6.6) から速度ポテンシャル Φ を求めることができる。ちなみに、これらの方程式は、ポテンシャルを使って表しているの、渦度 = 0 の式は自動的に満たされている。

ここで、式 (6.4) を誘導する。圧縮性流の連続の方程式は、

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = \rho \text{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (6.7)$$

となる。ここで、 $\text{div}(\vec{V}) = \nabla \cdot (\vec{V})$ である。

また、定常非粘性流の運動方程式は

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{a^2}{\rho} \nabla \rho \quad (6.8)$$

となる。ここで、等エントロピー流を扱っているの、音速の式

$$dp = a^2 d\rho \rightarrow \nabla p = a^2 \nabla \rho \quad (6.9)$$

が使用された。なぜなら、音速は等エントロピーとして計算するからである。

速度ベクトル \vec{V} と式 (6.8) との内積をとると、

$$\vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{a^2}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla \rho \quad (6.10)$$

となる。連続の式 (6.7) より

$$\vec{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \text{div} \vec{V} \quad (6.11)$$

であるので、これを式 (6.10) に代入すると

$$\vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = a^2 \nabla \cdot \vec{V} \quad (6.12)$$

となる。ポテンシャルを使って表すために、この式の \vec{V} に式 (6.5) を代入すると、ポテンシャル方程式 (6.4) が得られる。ここで注意したいことは、式 (6.12) の誘導には、渦度 = 0 の関係式を入れていないことである。後の章の超音速流のところ述べるが、超音速流の特性曲線に関する関係式を求めるときには、式 (6.12) と渦度 = 0 の式を連立して解く。

6.2 方程式の線形化

擾乱速度 \vec{v} が一様流速度 \vec{V}_{∞} に比べて小さいと仮定して、非線形のポテンシャル方程式を線形化する。

$$\vec{V} = \vec{V}_{\infty} + \vec{v} \quad v \ll V_{\infty} \quad (6.13)$$

速度ポテンシャルと速度ベクトルとの関係は、

$$\vec{V} = \nabla \Phi, \quad \vec{v} = \nabla \phi \quad (6.14)$$

である。あるいは、一様流が x 方向に吹いているとして、

$$\Phi = V_{\infty} x + \phi \quad (6.15)$$

である。

速度成分としては

$$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z) = (V_{\infty} + u, v, w) \quad (6.16)$$

となる。これらを使って、式 (6.4) に含まれる Φ に関する各項のオーダーを調べる。微量量を ϵ とする。

$$\begin{aligned}
\Phi_x^2 &= (V_\infty + \phi_x)^2 = V_\infty^2 + 2V_\infty\phi_x + \phi_x^2 = O(\epsilon^0) \\
\Phi_{xx} &= \phi_{xx} = O(\epsilon) \\
\Phi_y^2 &= \phi_y^2 = O(\epsilon^2) \\
\Phi_{yy} &= \phi_{yy} = O(\epsilon) \\
\Phi_z^2 &= \phi_z^2 = O(\epsilon^2) \\
\Phi_{zz} &= \phi_{zz} = O(\epsilon) \\
\Phi_x &= V_\infty + O(\epsilon) \\
\Phi_y &= \phi_y = O(\epsilon) \\
&\dots
\end{aligned} \tag{6.17}$$

ここで、 V_∞ は、基準となる大きさを持ち、0 次のオーダー ($O(\epsilon^0)$) と考え、 ϕ は、それより大きさが小さく、1 次のオーダー ($O(\epsilon)$) と考える。例えば、1 を 0 次のオーダーとすれば、1 次のオーダーは 0.1 である。

また、音速を求める式 (6.6) に同様な操作を行う。

$$\begin{aligned}
a^2 &= a_\infty^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(V_\infty^2 - V^2) \\
&= a_\infty^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)[V_\infty^2 - (V_\infty + \phi_x)^2 - \phi_y^2 - \phi_z^2] \\
&= a_\infty^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)[-2V_\infty\phi_x - \phi_x^2 - \phi_y^2 - \phi_z^2] \\
&= a_\infty^2 + O(\epsilon)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

式 (6.17) と式 (6.18) をポテンシャル方程式 (6.4) に代入すると、擾乱ポテンシャル ϕ に対する方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\left\{ a_\infty^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(-2V_\infty\phi_x - \phi_x^2 - \phi_y^2 - \phi_z^2) - V_\infty^2 - 2V_\infty\phi_x - \phi_x^2 \right\} \phi_{xx} \\
&+ \left\{ a_\infty^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(-2V_\infty\phi_x - \phi_x^2 - \phi_y^2 - \phi_z^2) - \phi_y^2 \right\} \phi_{yy} \\
&+ \left\{ a_\infty^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(-2V_\infty\phi_x - \phi_x^2 - V_\infty\phi_x^2 - \phi_z^2) - \phi_z^2 \right\} \phi_{zz} \\
&- 2\{(V_\infty + \phi_x)\phi_y\phi_{xy} + \phi_y\phi_z\phi_{yz} + \phi_y(V_\infty + \phi_x)\phi_{zx}\} = 0
\end{aligned} \tag{6.19}$$

ここで、この式のオーダーを考えると、一番大きなオーダーは、 ϵ^1 のオーダーとなり、この式の中から ϵ^1 のオーダーだけ取り出すと

$$(a_\infty^2 - V_\infty^2)\phi_{xx} + a_\infty^2\phi_{yy} + a_\infty^2\phi_{zz} = 0 \tag{6.20}$$

となる。この式を a_∞^2 で割ると

$$(1 - M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \tag{6.21}$$

が得られる。これが線形化されたポテンシャル方程式 (6.1) である。

この式は亜音速にも超音速にも適用できる。まとめると

- $1 - M_\infty^2 > 0$ のとき ($1 > M_\infty$ のとき) つまり、亜音速流では

$$(1 - M_\infty^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (6.22)$$

- $1 - M_\infty^2 < 0$ のとき ($1 < M_\infty$ のとき) つまり、超音速流では

$$(M_\infty^2 - 1)\phi_{xx} - \phi_{yy} - \phi_{zz} = 0 \quad (6.23)$$

となる。ちなみに、亜音速流の式は楕円型の偏微分方程式であり、超音速流の式は双曲型の方程式である。楕円型の方程式の典型はラプラス方程式であり、双曲型の方程式の典型は波動方程式である。

6.3 相似則

式(6.1)を使うと、例えば、圧縮性流中に置かれた2次元翼周りの流れが計算できる。ここでは、それらの流れについて調べていく。特に、2種類の流れ(流れ1と流れ2)を比較し、それらの関係から相似性を調べる。流れは2次元とする。

6.3.1 基本流(流れ1)

(x, y) 座標での流れを考える。Plandtl-Glauert の式とも呼ばれるポテンシャルの線型方程式(6.1)を $1 - M_1^2$ で割ると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - M_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (6.24)$$

が得られる。ここで M_1 は一様流のマッハ数である。ちなみに、この線型方程式は、通常、 $M_1 = 0.4$ ぐらいまで適用可能であるが、場合により、 $M_1 = 0.7$ ぐらいまで適用できる。

翼断面形状などの物体表面は、以下の式で表される。

$$y = t_1 f\left(\frac{x}{c}\right) = \tau_1 c f\left(\frac{x}{c}\right) \iff \frac{y}{c} = \tau_1 f\left(\frac{x}{c}\right) \quad (6.25)$$

ここで、 t_1 は厚み (thickness) で、 c は翼弦長 (chord length) で、 $\tau_1 = t_1/c$ は、厚み比 (thickness ratio) である。また、 $f' = df(\xi)/d\xi$ である。

流体が物体表面に沿って流れるという境界条件は

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{y=0} = V_1 \frac{dy}{dx} = V_1 \tau_1 f'\left(\frac{x}{c}\right) \quad (6.26)$$

となる。これは薄翼近似の場合である。つまり、本来物体表面上で評価されるべき境界条件は、薄翼近似のため、 x 軸上で評価しても良いことになる。これが、添え字 $y = 0$ が付いている理由である。

圧力係数は、式(5.17)より、

$$C_{p1} = -\frac{2u}{V_1} = -\frac{2}{V_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{y=0} \quad (6.27)$$

となる。

6.3.2 変換された流れ (流れ 2)

もうひとつの流れのポテンシャル $\Phi(\xi, \eta)$ を (ξ, η) 面上に考える。ここでの流れの速度を V_2 、マッハ数を M_2 とする。

ここで、 ϕ と Φ の間の関係を

$$\phi(x, y) = A \frac{V_1}{V_2} \Phi(\xi, \eta) = A \frac{V_1}{V_2} \Phi \left(x, \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{1 - M_2^2}} y \right) \quad (6.28)$$

とおく。ここで、 (x, y) 座標と (ξ, η) 座標の変換は

$$\xi = x, \quad \eta = \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{1 - M_2^2}} y \quad (6.29)$$

とする。式 (6.28)、式 (6.29) を式 (6.24) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{1 - M_2^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (6.30)$$

が得られる。

ここまですべてまとめると

- ϕ : 一様流マッハ数 M_1 における流れ ; 式 (6.24)
- Φ : 一様流マッハ数 M_2 における流れ ; 式 (6.30)

基本流の境界条件式 (6.26) は、式 (6.28) を使って、

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=0} = A \frac{V_1}{V_2} \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{1 - M_2^2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = V_1 \tau_1 f' \left(\frac{x}{c} \right) \quad (6.31)$$

となる。流れ 2 での厚み比を τ_2 として、

$$A \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{1 - M_2^2}} \tau_2 = \tau_1 \quad (6.32)$$

とする。つまり、厚みの変換である。ここで、 A は任意定数である。

式 (6.31) から

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = V_2 \tau_2 f' \left(\frac{\xi}{c} \right) \quad (6.33)$$

が得られる。これは、一様流 V_2 、 M_2 で、厚み比 τ_2 の翼周りの流れに対する境界条件となっている。これは、基本流 (流れ 1) に対する式 (6.26) と対応している。

1 番目の流れの圧力係数 C_{p1} を 2 番目の流れの変数で表す。式 (6.27) と式 (6.28) を使えば、

$$C_{p1} = -\frac{2}{V_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{y=0} = -\frac{2}{V_2} A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{\eta=0} \quad (6.34)$$

となる。

一方、第 2 の流れの圧力係数 C_{p2} は

$$C_{p2} = -\frac{2}{V_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{\eta=0} \quad (6.35)$$

と表されるので、 C_{p1} と C_{p2} の間には

$$C_{p1} = AC_{p2} \quad (6.36)$$

の関係が存在する。

以上まとめると、2種類の翼型で、2種類の流れ場は以下表のような特性量を持つ。

流れ	第1の流れ	第2の流れ
厚み比	τ_1	τ_2
圧力係数	C_{p1}	C_{p2}
主流マッハ数	M_1	M_2

この2つの流れ場に対して、厚み比と圧力係数は、式(6.32)と式(6.36)より

$$A\sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}}\tau_2 = \tau_1 \quad (6.37)$$

のように置けば、圧力係数は、係数(A)倍の違いとなる。

$$C_{p1} = AC_{p2} \quad (6.38)$$

ここで、話を展開するために、第2の流れを非圧縮性流、つまり、 $M_2 = 0$ とする。そのとき、式(6.37)より、流れ2と流れ1での厚み比の関係は

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{A\sqrt{1-M_1^2}} \quad (6.39)$$

となり、また、圧力係数の関係は

$$C_{p2} = \frac{C_{p1}}{A} \quad (6.40)$$

となる。

圧力は、一般的に厚み比の関数である。これを第2の流れで考えれば、

$$C_{p2} = f(\tau_2) \quad (6.41)$$

となる。 τ_2 を τ_1 で表せば、式(6.39)より、

$$C_{p2} = f(\tau_2) = f\left(\frac{\tau_1}{A\sqrt{1-M_1^2}}\right) \quad (6.42)$$

となる。左辺の圧力係数を式(6.40)より、第1の流れで置き換えれば、

$$\frac{C_{p1}}{A} = f\left(\frac{\tau_1}{A\sqrt{1-M_1^2}}\right) \quad (6.43)$$

となる。つまり、流れ1(圧縮性流)において、 C_{p1} 、 τ_1 、 M_1 、 A の間の一般的な関係が得られる。

6.3.3 Prandtl-Glauertの法則

式(6.43)から類推できるように、一般には、3次元流の場合において、

$$\frac{C_p}{A} = f\left(\frac{1}{A}\frac{\tau}{\sqrt{1-M_1^2}}, AR\sqrt{1-M_1^2}\right) \quad (6.44)$$

と書く事が出来る。ここで、 τ は厚み比、また、 AR はアスペクト比 (縦横比) である。

以下にいくつかの場合について考える。ただし、簡単のために、流れは 2 次元とする。

$$\frac{C_p}{A} = f\left(\frac{1}{A} \frac{\tau}{\sqrt{1-M_1^2}}\right) \quad (6.45)$$

いかに、 A の取り方を種々変えて調べる。

- $A = 1$ の場合 :

式 (6.45) で $A = 1$ にとると

$$C_p = f\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\right) \quad (6.46)$$

となる。ここで、この式において、 $M_\infty \rightarrow 0$ にして、非圧縮性流の場合を考えると

$$C_{p_i} = f(\tau_i) \quad (6.47)$$

となる。ここで、添え字 i は非圧縮性流を表す。

式 (6.46) と式 (6.47) を比較すると、

$$\frac{\tau}{\sqrt{1-M_\infty^2}} = \tau_i \quad (6.48)$$

であれば、

$$C_p = C_{p_i} \quad (6.49)$$

となる。つまり、厚み比を $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$ 倍した翼型を非圧縮性流で実験し、そのとき得られる圧力分布は、それが厚み比 τ を持つ翼型の圧縮性流での圧力分布となる。ちなみに、この厚み比の変換を行ったときには、揚力 L 、循環 Γ 、ピッチングモーメント M も同じになる。

$$C_L = C_{L_i}, \quad C_m = C_{m_i}, \quad \Gamma = \Gamma_i \quad (6.50)$$

- $A = 1/\sqrt{1-M_\infty^2}$ の場合 :

式 (6.45) で $A = 1/\sqrt{1-M_\infty^2}$ にとると

$$C_p \sqrt{1-M_\infty^2} = f(\tau) \quad (6.51)$$

となる。ここで、 $M_\infty \rightarrow 0$ にすると

$$C_{p_i} = f(\tau_i) \quad (6.52)$$

となる。これを解釈すると、厚み比を同じにすると、つまり、 $\tau = \tau_i$ とすると、同じ形状の (大きさの) 翼型の、圧縮性流と非圧縮性流での圧力分布の間には

$$C_p \sqrt{1-M_\infty^2} = C_{p_i} \quad (6.53)$$

の関係がある。つまり、圧縮性流では圧力分布は

$$C_p = \frac{C_{p_i}}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \quad (6.54)$$

となる。圧縮性の影響で圧力係数が増加する。これは大事な関係式である。

同様に他の空力係数や循環も同様な関係式となり、増加する。

$$C_L = \frac{C_{L_i}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}, \quad C_m = \frac{C_{m_i}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}, \quad \Gamma = \frac{\Gamma_i}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \quad (6.55)$$

- $A = \tau$ の場合： 式 (6.45) で $A = \tau$ にとると

$$\frac{C_p}{\tau} = f\left(\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}\right) \quad (6.56)$$

となる。この意味するところは、圧縮性流において、マッハ数が同じであれば、圧力係数 C_p は、厚み比 τ に比例する。つまり、厚い翼ほど圧力係数が大きくなる。つまり、

$$C_p \propto \tau \quad (6.57)$$

である。

第7章 衝撃波

飛行機が超音速で飛ぶと必ず衝撃波が発生する。また、亜音速で飛んでも、翼の上では速度が増加し、局所的に超音速になるので、その後、減速するときに衝撃波が発生する。

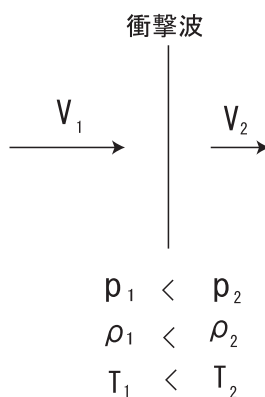


図 7.1: 衝撃波を横切った際の諸量の不連続

7.1 衝撃波とは

衝撃波とは、それを横切って、諸量が不連続に変化する不連続面のことである。衝撃波を横切ると、速度は減少し、圧力、密度、温度は増加する。

流れが超音速になると、流れが減速する時に、等エントロピー的に減速すると、ある圧力まで上げることができないために、衝撃波を発生させて、それを通過させることにより、速度をさらに落とし、圧力を上げる現象が起きる場合がある。つまり、衝撃波を通過するとエントロピーは変化する。より正確に言えば、エントロピーは増加する。また、衝撃波を通ると、流れの諸量は不連続的に変化する。ここではこれについて勉強する。なお、衝撃波には垂直衝撃波と斜め衝撃波の2種類あるが、基本は垂直衝撃波である。

- 衝撃波は非常に薄く、通常空気では 10^{-5} cm のオーダーである。従って、普通の流れを扱うときには、衝撃波を不連続面と考えてよい。
- 衝撃波に対して、外部から力や熱などの作用が無いので、衝撃波を通過して、1) 質量、2) 運動量、3) エネルギーが保存される。

[参考]

衝撃波の厚さ δ のおおよその値は、

$$\frac{\delta \Delta V}{\nu} \sim 1 \quad (7.1)$$

の式から推定できる。ここで、 ΔV は衝撃波前後の速度差で、 $\Delta V = V_1 - V_2$ である。また、 ν は動粘性係数である。例えば、マッハ数 2 の流れに垂直衝撃波が発生する場合を考える。 $T_1 = 300K$ とすれば、音速は、 $a_1 = 347m/s$ 、従って、速度は、 $V_1 = 694m/s$ である。垂直衝撃波の関係式より、 $M_2 = 0.577$ となる。衝撃波後の温度は $T_2 = 506.3^\circ$ であるので、音速は、 $a_2 = 451.01m/s$ となる。従って、速度は、 $V_2 = 260.2m/s$ である。以上より、速度差は、 $\Delta V = 434.2m/s$ となり、式 (7.1) より、動粘性係数を、 $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ とすれば、衝撃波の厚さ、 $\delta = 3.5 \times 10^{-8}m$ となる。

7.2 衝撃波の支配方程式

流れの中に衝撃波が静止している場合を考える。衝撃波が伝播している場合は、我々が衝撃波に乗って流れを見ていると考えればよい。このとき、衝撃波を含む検査体積 (control volume) を考えると、衝撃波を横切って、次の関係式が成立する。

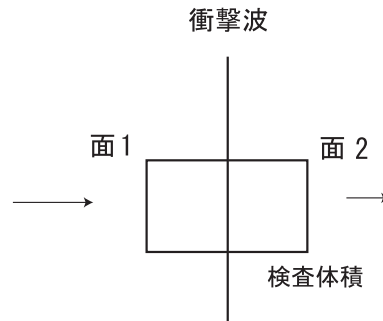


図 7.2: 不連続面を扱うための衝撃波を含む検査体積

- 連続の式 (質量流量が同じ):

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad (7.2)$$

- x 方向の運動量の釣り合い:

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 \quad (7.3)$$

- エネルギー式:

$$h_1 + \frac{1}{2}V_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}V_2^2 \quad (7.4)$$

- 完全ガスの状態方程式:

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2} \quad (7.5)$$

- エントロピーが増加する。

$$S_2 \geq S_1 \quad (7.6)$$

ここで、添え字 $()_1$ および $()_2$ は、それぞれ、衝撃波に入ってくる流れおよび衝撃波から出て行く流れを表す。また、 ρ は密度、 V は速度、 p は圧力、 h はエンタルピー、 T は温度である。

また、熱量的完全ガスの場合 (比熱が一定の場合)、エンタルピーは

$$h = C_p T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \times \frac{p}{\rho R} = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \text{一定} \quad (7.7)$$

となる。ここで、 C_p は等圧比熱、 C_v は等積比熱、 γ は比熱比である。

7.3 衝撃波前後での諸量の変化

衝撃波を横切って諸量がどのように変化するかを見ていく。

7.3.1 衝撃波を通過しても変化しない量

エネルギーは、衝撃波前後で変化しないので、全エンタルピー (total enthalpy) は一定である。

$$H_{01} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} V_1^2 = H_{02} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} V_2^2 \quad (7.8)$$

順番に考えていくと、全エンタルピー、総温、激み音速、臨界温度、臨界音速が衝撃波を横切って変化しないことが分かる。

$$(H_0)_1 = (H_0)_2 \rightarrow (T_0)_1 = (T_0)_2 \rightarrow (a_0)_1 = (a_0)_2 \rightarrow (T^*)_1 = (T^*)_2 \rightarrow (a^*)_1 = (a^*)_2 \quad (7.9)$$

熱量的完全ガスの場合、総温は $H_0 = C_p T_0$ と表されるので、総温 T_0 は変化しない。また、激み音速は $a_0^2 = \gamma R T_0$ と表されるので、激み音速も衝撃波を横切って変化しない。さらに、臨界温度は、式 (2.35) から臨界温度と総温の比が一定であるので、衝撃波前後で同じである。最後に、 $a_*^2 = \gamma R T_*$ より、 T_* も変化しない。

また、式 (2.20) から、それぞれの領域で得られる最大速度も変化しない。

$$(V_{max})_1 = (V_{max})_2 \quad (7.10)$$

7.3.2 圧力、密度、速度、温度の変化

衝撃波前後の量に関する方程式 (7.2) ~ (7.5) を用いると、衝撃波の後ろの各量 (V_2, p_2, ρ_2) が求められる。これらの式から、 ρ_2, V_2 を消去すると、各量の比が衝撃波の前のマッハ数 M_1 の関数として得られる。

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left[\frac{\rho_1 V_1^2}{\gamma p_1} - 1 \right] = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (7.11)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2 + 2} \quad (7.12)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_1^2} \quad (7.13)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{\gamma M_1^2 + 1}{M_1^2} (M_1^2 - 1) \quad (7.14)$$

ここでは、音速の関係式 $a_1^2 = \gamma R T_1$ が使われている。これらの関係式から分かることは、衝撃波に入ってくるマッハ数 (M_1) が無限大になったとき、衝撃波通過後に、圧力や温度は無限大になるが、密度は有限な量にまでしか増大しないことである。

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (7.15)$$

ただし、比熱比 γ が 1 に近付くと、密度は無限大になる。これは、極超音速流でよく使われるニュートン近似に対応するもので、ニュートン近似では、衝撃波が物体表面に付着している場合を考えている。つまり、shock standoff distance が 0 となる。

マッハ数 (M_1)	マッハ数 (M_2)
1	1
2	0.577
3	0.475
4	0.435
5	0.415
6	0.404
7	0.397
8	0.393

表 7.1: 衝撃波前後でのマッハ数の関係 (M1:入射マッハ数、M2:流出マッハ数)

7.3.3 M_1 と M_2 の関係

衝撃波に入ってくる流れのマッハ数 M_1 と衝撃波通過後のマッハ数 M_2 との関係は

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma} \quad (7.16)$$

となる。

式 (7.16) の誘導は以下の通りである。まず、断熱流における静温と総温の比は、式 (2.25) より

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \quad (7.17)$$

となる。衝撃波前後で T_0 は変化しないため、衝撃波前後での温度比 T_2/T_1 は

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T_0}{T_1/T_0} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} \quad (7.18)$$

となる。完全ガスの状態方程式 (1.56) より

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} \quad (7.19)$$

が得られる。ここで、連続の方程式 (7.2) が使われている。この式をマッハ数 M を使って書き直すと

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{M_2 a_2}{M_1 a_1} = \frac{p_2 M_2}{p_1 M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (7.20)$$

ここでは、音速が温度の平方根に比例するという式 (1.3) が使われている。この式の1番左の式と一番右の式から、 T_2/T_1 を求めると

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 \quad (7.21)$$

となる。

式 (7.18) と式 (7.21) を等しいとおくと、

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}} \quad (7.22)$$

となる。

一方、完全ガスでは

$$\rho V^2 = \rho \frac{V^2}{a^2} a^2 = \frac{p}{RT} \cdot M^2 \cdot a^2 = \frac{pM^2 \gamma RT}{RT} = \gamma p M^2 \quad (7.23)$$

と表せる。運動量に関する式 (7.3) より

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (7.24)$$

となり、この式の左辺第 2 項と右辺第 2 項に対して、式 (7.23) を代入すると、

$$\begin{aligned} p_1 + \gamma p_1 M_1^2 &= p_2 + \gamma p_2 M_2^2 \\ p_1(1 + \gamma M_1^2) &= p_2(1 + \gamma M_2^2) \\ \frac{p_1}{p_2} &= \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \end{aligned} \quad (7.25)$$

となる。式 (7.22) と式 (7.25) を等しいと置くと

$$\frac{M_1 \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}}{1 + \gamma M_1^2} = \frac{M_2 \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}}{1 + \gamma M_2^2} \quad (7.26)$$

となり、これを解くと 2 つの解が出てくる。

$$M_2 = M_1, \quad M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1} \quad (7.27)$$

$M_2 = M_1$ はつまらない解であるので、後者が答えとなる。

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1} = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \quad (7.28)$$

ちなみに、

$$M_1 \rightarrow 1 \text{ のとき } M_2 \rightarrow 1 \quad (7.29)$$

$$M_1 \rightarrow \infty \text{ のとき } M_2 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (7.30)$$

となる。通常的气体では、どんなに速い流れになっても、衝撃波の後ろの流れの速度は 0 にならない ($\gamma = 1$ の場合を除いて)。

7.4 ランキン・ユゴニオの関係式

連続の式 (7.2)、運動量の式 (7.3)、エネルギーの式 (7.4) から、速度 V_1, V_2 を消去するとランキン・ユゴニオ (Rankine-Hugoniot) の関係式が得られる。

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2} = \frac{(\gamma+1)(\rho_2/\rho_1) - (\gamma-1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)(\rho_2/\rho_1)} \quad (7.31)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_1}{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_1} = \frac{(\gamma+1)(p_2/p_1) + (\gamma-1)}{(\gamma-1)(p_2/p_1) + (\gamma+1)} \quad (7.32)$$

ここで、圧力比が小さいときには ($p_2/p_1 \simeq 1 + \epsilon$)、上式をテーラー展開で微小擾乱展開したものは、等エントロピーの関係式を微小擾乱展開したものと同一になる。

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma \quad \text{あるいは} \quad \ln \frac{p_2}{p_1} = \gamma \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (7.33)$$

これを微小変化の仮定で展開すると

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \quad (7.34)$$

となる。ここで、 $\Delta p = p_2 - p_1$ 、 $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ である。つまり、マッハ数が 1 に近い場合には、エントロピー上昇はほとんどなく、ポテンシャル流と考えてよい。遷音速流の場合には、これに近い流れとなる。

ちなみに、圧力比を速度比で表すと

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{V_2}{V_1}\right) / \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{V_2}{V_1} - 1\right) \quad (7.35)$$

となる。

参考：衝撃波の伝播速度

ランキン・ユゴニオの関係式より、衝撃波の伝播速度 C_{shock} に関する以下の式が導かれる。

$$[f] - C_{shock} [U] = 0 \quad (7.36)$$

ここで、 $[a]$ は衝撃波前後の量の差を表し、 $[a] = a_1 - a_2$ である。 a_1 は衝撃波前の値、 a_2 は衝撃波後の値である。また、 f は流束 (flux) で、 U は解ベクトルである。ちなみに、流束は、解ベクトルの関数である ($f = f(U)$)。1 次元オイラー方程式の場合には、

$$U = (\rho, \rho u, e_t)^t, \quad f = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u H)^t \quad (7.37)$$

となる。 u は流れの速度、 e_t は単位体積当りの全エネルギー、 H は全エンタルピーである。

$$e_t = \rho(e_i + u^2/2), \quad H = h + u^2/2 \quad (7.38)$$

ここで、 e_i は単位質量当りの内部エネルギーである。

7.4.1 エントロピー変化

流れが衝撃波を通過するとき、エントロピーがどのように変化するかを見る。衝撃波に入り込む側を $()_1$ と衝撃波から出て行く側を $()_2$ で表すと、それぞれの側でエントロピーは、式 (1.81) より、以下の式で表される。

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = C \exp(S_1/C_v), \quad \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = C \exp(S_2/C_v) \quad (7.39)$$

これらの式を割り算すると

$$\frac{p_2/p_1}{(\rho_2/\rho_1)^\gamma} = \exp\{(S_2 - S_1)/C_v\} \rightarrow \frac{S_2 - S_1}{C_v} = \ln \frac{p_2/p_1}{(\rho_2/\rho_1)^\gamma} \quad (7.40)$$

となる。この式に式 (7.11) と式 (7.12) を代入すると

$$\frac{S_2 - S_1}{C_v} = \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma \right] = \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right]^\gamma \right\} \quad (7.41)$$

となる。

この式より、エントロピーは

$$\frac{S_2 - S_1}{C_v} > 1 \quad \text{if } M_1 > 1 \quad (7.42)$$

$$\frac{S_2 - S_1}{C_v} < 1 \quad \text{if } M_1 < 1 \quad (7.43)$$

となる。

前者を圧縮衝撃波 (compression shock)、後者を膨張衝撃波 (rarefaction shock) と呼ぶ。実際にはエントロピーが減少することは無いので (式 (7.6))、後者の膨張衝撃波は存在しない。つまり、 $M_1 > 1$ でないと、衝撃波は存在しない。

あるいは、衝撃波前後のエントロピー変化に関して以下のようにも表すことができる。エントロピーは次のように表せる。

$$S_2 - S_1 = (C_p - C_v) \ln \frac{(T_2/T_1)^{\gamma/(\gamma-1)}}{p_2/p_1} \quad (7.44)$$

これは、式 (1.84) より

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{C_p}{R} \ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (7.45)$$

となり、 $C_p/R = C_p/(C_p - C_v) = \gamma/(\gamma - 1)$ から、

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (7.46)$$

となるためである。

また、澱みエントロピーに対しては、添え字 0 を付けて、

$$S_{02} - S_{01} = (C_p - C_v) \ln \frac{(T_{02}/T_{01})^{\gamma/(\gamma-1)}}{p_{02}/p_{01}} \quad (7.47)$$

の関係が得られる。衝撃波の前の領域 (1) と後ろの領域 (2) では、それぞれの領域で流れを断熱的に澱ませてもそれぞれの領域のエントロピーは変化しないので、

$$S_1 = S_{01}, \quad S_2 = S_{02} \quad (7.48)$$

となる。従って

$$S_2 - S_1 = S_{02} - S_{01} \quad (7.49)$$

となる。また、衝撃波を通過して総温は変化しないので

$$T_{02} = T_{01} \quad (7.50)$$

である。さらに、メイヤーの関係式より

$$C_p - C_v = R \quad (7.51)$$

である。これらを式 (7.47) に代入すると、

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{S_{02} - S_{01}}{R} = \ln \frac{p_{01}}{p_{02}} \quad (7.52)$$

となる。衝撃波を横切ると総圧は大きく減少する。つまり、 $p_{01}/p_{02} > 1$ となる。従って、衝撃波を横切ってエントロピーは増加することになる。つじつまが合っている。

ちなみに、式(7.44)を、状態方程式を使って、圧力と密度を含む形に変形する。状態方程式より、

$$p = \rho RT \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_1 T_1}{\rho_2 T_2} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \frac{p_2}{p_1} \quad (7.53)$$

となる。これを式(7.44)に代入すると、

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \ln(\rho_2/\rho_1)^{-\gamma/(\gamma-1)} + \ln(p_2/p_1)^{1/(\gamma-1)} \quad (7.54)$$

となる。

7.4.2 総圧の関係

衝撃波の前後の領域で、等エントロピー的に圧縮することにより、それぞれの領域で静圧 p と総圧 p_0 に関して、式(2.32)から次の関係式が成立する。

$$\frac{p_1}{p_{01}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (7.55)$$

$$\frac{p_2}{p_{02}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (7.56)$$

ここで、 p_{02}/p_{01} を以下のように変形して求める。

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_{01}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (7.57)$$

p_2/p_1 に式(7.11)を代入すると

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \times \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \quad (7.58)$$

となる。この式に式(7.16)を代入すると

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{-1/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_1^2}\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (7.59)$$

となる。

$M_1 \geq 1$ であれば、 $p_{02}/p_{01} \leq 1$ であるので、衝撃波を通過すると総圧は減少する。代表的なマッハ数での、総圧比を表(7.2)に示す。このように $M = 8$ になると、総圧比は大変小さく 1% 以下とな

マッハ数 (M_1)	圧力比 (p_{02}/p_{01})
1.5	0.93
2	0.72
2.5	0.50
3	0.32
5	0.06
8	0.008

表 7.2: マッハ数と衝撃波前後の総圧比との関係

る。つまり、総圧損失が大変大きいことを示している。これが超音速飛行での抵抗となる。従って、総圧損失を減少させる工夫が必要である。

7.5 プラントルの関係式

スロート（流管が一番狭まった部分）での音速流れに基づいたマッハ数の関係式をプラントル (Prandtl) の関係式と呼ぶ。衝撃波前後の速度比 V_2/V_1 とマッハ数 M_1 の関係は式 (7.13) より

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_1^2} \quad (7.60)$$

となる。この両辺に V_1^2 を掛けると

$$V_1 V_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_1^2 + \frac{2}{\gamma + 1} a_1^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(V_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1} a_1^2 \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_{max}^2 \quad (7.61)$$

となる。ここで、最大速度に関する次の関係式が使われている。最大速度は式 (2.12) と式 (2.18) で、流れが温度 0 にまで膨張した場合、つまり $h = 0$ の場合 ($T = a = 0$) として得られる。

$$V_{max}^2 = V_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1} a_1^2 \quad (7.62)$$

また、臨界音速 V_* と最大速度 V_{max} との関係式 (2.38) より、式 (7.61) の右辺を $V_*(= a_*)$ で表すと

$$V_1 V_2 = a_*^2 \quad \text{あるいは} \quad \frac{V_1}{a_*} \cdot \frac{V_2}{a_*} = 1 \quad (7.63)$$

の関係式が得られる。式 (7.63) を プラントルの関係式 と呼ぶ。ちなみに臨界音速とは流れの速度が音速に等しいときであり、そのときは $V_* = a_*$ である。

$$\frac{V_1}{a_*} > 1 \quad (7.64)$$

であるので、プラントルの関係式より

$$\frac{V_2}{a_*} < 1 \quad (7.65)$$

が言える。

ここからは、衝撃波を含む流れのみならず一般的な流れを考える。流れの全エンタルピーが場所場所で変わらないという関係を仮定すれば、

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2 \quad (7.66)$$

となる。左辺は任意の場所での値であり、右辺はスロートでの値（速度と音速が等しくなる； $V_* = a_*$ ）である。

- $V^2 < a_*^2$ の場合：式 (7.66) より

$$V^2 < a_*^2 = \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left(\frac{1}{2} V^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} \right) \rightarrow V^2 < a^2 \quad (7.67)$$

となる。この式を整理すると、

$$V^2 < a^2 \quad (7.68)$$

となる。つまり、局所の流れの速度 V がスロートでの音速 a_* より小さいときには、必ず局所の流れ速度 V が局所の音速 a より小さくなる。

言い換えれば、スロートでの音速に基づいたマッハ数 M_* と局所のマッハ数 M を用いれば

$$M_*^2 = \frac{V^2}{a_*^2} < 1 \rightarrow M^2 = \frac{V^2}{a^2} < 1 \quad (7.69)$$

となる。この解釈として、ラバールノズルを考えたとき、亜音速流側 ($M < 1$) では、スロートより手前があるので、温度はスロートでの温度ほど下がっていない。

$$T > T_* \rightarrow a > a_* \quad (7.70)$$

従って、

$$\frac{V}{a} < \frac{V}{a_*} \rightarrow M < M_* \quad (7.71)$$

となる。このことから、 $M_* < 1$ であれば、 $M < 1$ である（亜音速である）と言える。

- $V^2 > a_*^2$ の場合：式 (7.66) より

$$V^2 > a_*^2 = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} \right) \rightarrow V^2 > a^2 \quad (7.72)$$

となり、この不等式を解くと、

$$V^2 > a^2 \quad (7.73)$$

となる。

つまり、スロートに基づいたマッハ数 M_* と局所のマッハ数 M を用いれば

$$M_*^2 = \frac{V^2}{a_*^2} > 1 \rightarrow M^2 = \frac{V^2}{a^2} > 1 \quad (7.74)$$

となる。この解釈は、ラバールノズルを考えたとき、超音速流側 ($M > 1$) では、スロートより下流側にあるので、温度はスロートの温度より下がっている。

$$T < T_* \rightarrow a < a_* \quad (7.75)$$

従って、

$$\frac{V}{a} > \frac{V}{a_*} \rightarrow M > M_* \quad (7.76)$$

となる。このことから、 $M_* > 1$ であれば、 $M > 1$ である（超音速である）と言える。

(参考)

流れをマッハ数 M で表すのは大変便利であるが、これには以下の欠点がある。

- マッハ数 M は速度だけに比例しない。分母の音速によっても変化する。
- 速度が増加すると、マッハ数 M は無限大まで増加してしまう。

(了)

7.6 斜め衝撃波

一般には衝撃波は一様流に対してある角度を持って発生する。これを斜め衝撃波 (oblique shock wave) と呼ぶ。特に、超音速流中に物体が置かれたときその前方部に発生する衝撃波 (bow shock) は、湾曲している。中心部では垂直衝撃波であるが、中心から離れるにつれて衝撃波は一様流に対して傾いていく。

斜め衝撃波の関係式を求めるときに大事なことは、

- 流入する流れの、衝撃波に垂直な流れの成分に対して、上述の垂直衝撃波の関係式が成立する。

- 流入する流れの、衝撃波に沿う方向の流れの成分は、衝撃波の前後で変化しない。

ことである。つまり、衝撃波に垂直な方向の速度成分を V_n 、衝撃波に沿う方向の速度成分を V_t とすれば、

$$\frac{V_{n2}}{V_{n1}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_{n1}^2} \quad (7.77)$$

$$V_{t2} = V_{t1} \quad (7.78)$$

最初の関係式は、式 (7.13) に基づいている。ここで、添え字 1 は衝撃波の前の流れを、添え字 2 は衝撃波の後の流れを表す。

今、衝撃波が x 軸 (水平) に対して、 β の角度だけ傾いて存在し、衝撃波の前の流れは x 軸方向に V_1 、衝撃波を通過した流れは、絶対値が V_2 で、角度 θ だけ x 軸から偏向したとする。従って、

$$V_{n1} = V_1 \sin \beta, \quad V_{t1} = V_1 \cos \beta \quad (7.79)$$

である。

衝撃波に垂直な成分に対して

$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1 \sin \beta}{a_1} = M_1 \sin \beta > 1 \quad (7.80)$$

$$M_{n2} = \frac{V_{n2}}{a_2} = \frac{V_2 \sin(\beta - \theta)}{a_2} = M_2 \sin(\beta - \theta) < 1 \quad (7.81)$$

となる。理由は、垂直衝撃波の関係式より、垂直衝撃波の前では超音速、垂直衝撃波の後では、亜音速になるためである。

衝撃波に沿う方向の速度は、衝撃波を横切っても変化しないので、

$$V_1 \cos \beta = V_2 \cos(\beta - \theta) \quad (7.82)$$

となる。速度比で表せば、

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \theta)} \quad (7.83)$$

である。また、衝撃波に垂直に流入する質量はそのまま衝撃波から流出するので (質量流量保存の関係)

$$\rho_1 V_1 \sin \beta = \rho_2 V_2 \sin(\beta - \theta) \quad (7.84)$$

となる。

一方、圧力比 p_2/p_1 は、式 (7.11) より

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (7.85)$$

となる。密度比は、式 (7.12) より

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \quad (7.86)$$

となる。あるいは、式 (7.83) と式 (7.84) を使って、

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1 \sin \beta}{V_2 \sin(\beta - \theta)} = \frac{\cos(\beta - \theta)}{\cos \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \theta)} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)} \quad (7.87)$$

となる。

衝撃波前後でのマッハ数の関係は

$$M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta + 1 - \gamma} \quad (7.88)$$

となる。この式の誘導は、圧力比 p_2/p_1 が

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma M_1^2 \sin^2 \beta \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \quad (7.89)$$

となる。これは、衝撃波に垂直方向の運動量の関係式を衝撃波前の状態を基準に整理した式から得られる。

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2 = -\rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{\rho_2 V_{n2}^2}{\rho_1 V_{n1}^2}\right) \quad (7.90)$$

一方、圧力比 p_1/p_2 が

$$\frac{p_1}{p_2} = 1 + \gamma M_2^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \sin^2(\beta - \theta) \quad (7.91)$$

となる。これは、衝撃波に垂直方向の運動量の関係式を衝撃波後の状態を基準に整理した式から得られる。

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_{n2}^2 \left(1 - \frac{\rho_1 V_{n1}^2}{\rho_2 V_{n2}^2}\right) \quad (7.92)$$

式 (7.91) が式 (7.89) の逆数に等しいので、

$$1 + \gamma M_2^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \sin^2(\beta - \theta) = \frac{1}{1 + \gamma M_1^2 \sin^2 \beta \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} \quad (7.93)$$

となる。この式を整理すると

$$\gamma M_2^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \sin^2(\beta - \theta) = \frac{-\gamma M_1^2 \sin^2 \beta \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)}{1 + \gamma M_1^2 \sin^2 \beta \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} \quad (7.94)$$

となる。さらに簡単化すると、

$$M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = \frac{1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \cdot \frac{-M_1^2 \sin^2 \beta}{1 + \gamma M_1^2 \sin^2 \beta \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} \quad (7.95)$$

となる。ここで、

$$\frac{1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (7.96)$$

であるので、

$$M_2^2 \sin^2(\beta - \theta) = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{-M_1^2 \sin^2 \beta}{1 + \gamma M_1^2 \sin^2 \beta \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} \quad (7.97)$$

となる。この式に式 (7.86) を代入すると、式 (7.88) が得られる。

ここで、衝撃波の角度 (wave angle) β と流れの角度 (deflection angle) θ との間の大事な関係式は

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \quad (7.98)$$

となる。これは、式 (7.86) と式 (7.87) より

$$\frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)} \quad (7.99)$$

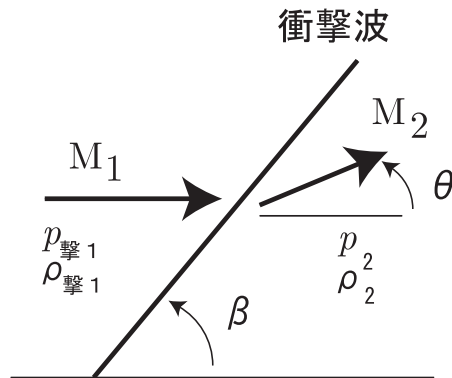


図 7.3: 斜め衝撃波を過ぎる流れ

となる。この式の $\tan(\beta - \theta)$ に、

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{\tan \beta - \tan \theta}{1 + \tan \beta \cdot \tan \theta} \quad (7.100)$$

の公式を代入して、 $\tan \theta =$ の形にすれば得られる。

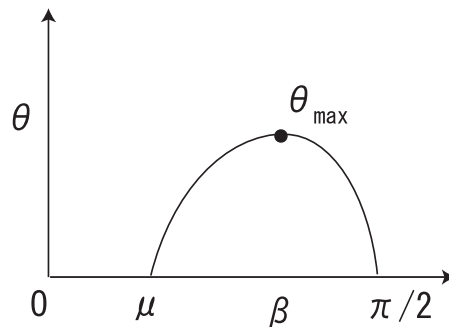


図 7.4: 流れの偏向角と衝撃波角の関係

衝撃波に流入マッハ数を M_1 、衝撃波通過後の流れの偏向角を θ 、衝撃波角度を β とすれば、これらの間の関係は図 7.4 のように描くことが出来る。極端な場合として、 θ が 0 の場合（衝撃波後ろの楔の角度が 0 の場合に相当）には、衝撃波は音波にまで弱まり、その結果 β はマッハ角 $\sin \mu = 1/M_1$ となる（ $\beta = \mu$ ）。

一方、 θ が大きくなり、つまり、物体の角度が大きくなる（楔角が大きくなる）と、 β も大きくなり、ある角度以上になると（ $\theta > \theta_{max}$ ）、衝撃波は物体にもはや付着することができず、物体から離れるようになる。これを離脱衝撃波 (detached shock) と呼ぶ。例えば、一様流のマッハ数を $M_1 = 2.5$ とすると、物体の先端の角度が $\theta = 30^\circ$ 以上になると、衝撃波は離脱する。逆の言い方をすれば、物体の先端の角度が $\theta = 30^\circ$ の場合、一様流のマッハ数が $M_1 \leq 2.5$ になると衝撃波は離脱する。ちなみに物体先端に付着した衝撃波を付着衝撃波 (attached shock) と呼ぶ。離脱衝撃波では、中心部付近（楔の先端付近）では垂直衝撃波になり、衝撃波としては強い衝撃波が発生していることになる。

図 7.5 では、マッハ数 M_1 をいろいろ変えた場合の変化を表している。実線は各マッハ数における θ_{max} の軌跡である。また破線は、流れが衝撃波を通過後に、破線より左側は超音速に、右側は亜音

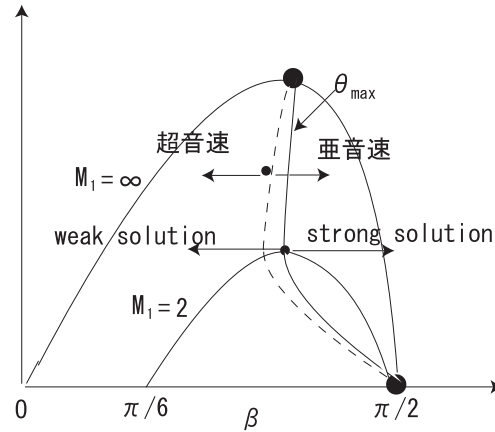


図 7.5: 衝撃波通過後の流れ (weak solution/strong solution; supersonic/subsonic)

速になる領域の境目を表す。楔の角度を $\theta = 0$ から徐々に大きくしていくと、最初は衝撃波通過後の楔の表面に沿う流れは超音速であるが、ある角度に達すると亜音速になる。それから先は、 θ_{max} まで楔の角度を大きく出来るが、それから先は、衝撃波が楔から離脱する。

また図 7.5 では、同じ θ でも ($\theta = const$ の線を引く)、衝撃波の角度 β は、2 つの解を持つ ($\beta = \beta_1, \beta_2$)。 $\beta_1 > \beta_2$ とすれば、 β_1 の方が衝撃波がより立ってくることになり、その結果強い衝撃波になる (衝撃波通過後の圧力上昇や速度減少が大きくなる)。

斜め衝撃波を横切ったの温度比 T_2/T_1 は、状態方程式と、式 (7.85)、式 (7.86) を使って、

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \times \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left\{ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right\} \frac{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \beta + 2}{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2 \beta} \quad (7.101)$$

となる。

ちなみに、速度成分に関しては

$$\frac{u_2}{V_1} = 1 - \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1)}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (7.102)$$

$$\frac{v_2}{V_1} = \frac{2(M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \cot \beta}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (7.103)$$

ここで、斜め衝撃波後ろでの流れは $V_2 = (u_2, v_2)$ である。この式の誘導を以下に示す。衝撃波の後ろの速度は

$$u_2 = V_2 \cos \theta, \quad v_2 = V_2 \sin \theta \quad (7.104)$$

である。いま、 u_2 の誘導に焦点を絞る。上式から、

$$\frac{u_2}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \cos \theta \quad (7.105)$$

となる。また、式 (7.83) を代入すると、

$$\frac{u_2}{V_1} = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \theta)} \cos \theta = \frac{\cos \beta}{\cos \beta + \sin \beta \tan \theta} \quad (7.106)$$

となる。ここでは、 $\cos(\beta - \theta)$ が公式から展開されている。

この式の $\tan \theta$ に式 (7.98) を代入して整理すると、式 (7.102) が得られる。同様な方法で、式 (7.103) も得られる。

7.6.1 3次元衝撃波面に対する関係式

衝撃波面の速度を V_s とする。つまり、衝撃波は移動しているとする。その結果、以下の関係式が得られる。

$$V_s = |\vec{u}_{1n}| - \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{1 - 1/\rho_2}} \quad (7.107)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left[M_1 \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{n})}{|\vec{u}_1| |\vec{n}|} \right]^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (7.108)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2/p_1 + (\gamma - 1)/(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)/(\gamma + 1)p_2/p_1 + 1} \quad (7.109)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \frac{2(p_2 - p_1)}{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1} |\vec{u}_{1n}| \vec{n} \quad (7.110)$$

ここで、 \vec{n} は衝撃波面に垂直な単位ベクトルである。また、添え字 n は、衝撃波面に垂直な方向の成分である。

7.7 Crocco の定理

鈍頭物体の前に生じる衝撃波 (bow shock) は、衝撃波に沿って、その角度 (一様流との角度) を変えるので、衝撃波通過後の流れは、そのエントロピー分布が一定ではなくなる。その結果、渦度が発生する。これについて以下に述べる。

全エンタルピー (total enthalpy) は、少なくとも各流線上で一定であるので、

$$H_0 = h + \frac{1}{2}V^2 = \text{const} \quad (7.111)$$

となる。流線に垂直な方向を n として、この式を n の方向に微分する。

$$\frac{\partial H_0}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial n} + V \frac{\partial V}{\partial n} \quad (7.112)$$

流線を横切る方向には、constant の値が変わる可能性があるので、一般には 0 とは置けない。しかし、一様流から来る流線はみな H_0 が同じであると考えてよい。従って、後で示すように、この式は、ここでは 0 となる。

次に、熱力学の第一法則より、

$$\delta Q = T\delta S = \delta e_i + p\delta v = \delta h - v\delta p \quad (7.113)$$

となる。ここで、 e_i は内部エネルギーである。最後の関係式は、エンタルピーの定義式 $h = e_i + p/\rho = p + pv$ が使われている。ちなみに、 v は比容積で、 $v = 1/\rho$ である。式 (7.113) より

$$\delta h = T\delta S + v\delta p = T\delta S + \frac{1}{\rho}\delta p \quad (7.114)$$

となる。従って、 n 方向の微分は

$$\frac{\partial h}{\partial n} = T \frac{\partial S}{\partial n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (7.115)$$

となる。

式 (7.115) を式 (7.112) に代入すると

$$\frac{\partial H_0}{\partial n} - V \frac{\partial V}{\partial n} = T \frac{\partial S}{\partial n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (7.116)$$

となる。

次に、運動方程式を考える。あるひとつの流線を考えると、流線方向 (s 方向) には、

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} \quad (7.117)$$

が成立する。また、流線に垂直方向 (n 方向) の運動方程式は、

$$\frac{\rho V^2}{R} = \frac{\partial p}{\partial n} \quad (7.118)$$

となる。式 (7.118) を式 (7.116) に代入すると

$$\frac{\partial H_0}{\partial n} = T \frac{\partial S}{\partial n} + V \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{V}{R} \right) \quad (7.119)$$

となる。

ここで、円柱座標 (r, θ, z) における渦度ベクトルの z 方向成分 ω_z は

$$\omega_z = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{R} \quad (7.120)$$

である。これの誘導として、円柱座標では、渦度 ω_z は、

$$\omega_z = \left(\nabla \times \vec{V} \right)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{R} \quad (7.121)$$

ここで、 $V_r = 0$ 、また、 $V = V_\theta$ としている。

従って、式 (7.119) は、

$$\frac{\partial H_0}{\partial n} = T \frac{\partial S}{\partial n} + V \cdot \omega_z \quad (7.122)$$

となる。

この式より、 H_0 が場所全体で同じであれば (つまり均一であれば)、これを homogeneous と呼ぶが、このとき、左辺は 0 となる。上流での一様流が衝撃波を通過しても、 H_0 は変わらないので、衝撃波の下流でも均一である。従って

$$\omega_z = -\frac{T}{V} \frac{\partial S}{\partial n} \quad (7.123)$$

となる。つまり、衝撃波を過ぎた後の領域で、エントロピーが空間的に変化して分布すれば、 $\partial S / \partial n \neq 0$ となり、それに伴い、渦度 ω_z が発生することになる。これが、衝撃波が存在すると流れ場中で渦なしでなくなる (ポテンシャル流ではなくなる) 理由である。つまり、衝撃波が直線形状の場合には、渦度は発生しないが、衝撃波が曲がった状態で存在すると、衝撃波を横切った後の流れには渦度が発生することになる。これは高速流 (特に極超音速流) で大事な性質である。極超音速流では、物体表面近くにエントロピー層 (entropy layer) が存在する。

7.8 楔と円錐周りの流れの違い

ここでは、超音速流中に 2 次元物体である楔と 3 次元物体である円錐が置かれたときに、それぞれの物体に沿って流れる流れが作り出す場について、その違いを調べる。ここで注意する事は、楔 (wedge; 2 次元物体) と円錐 (cone; 3 次元物体) ではそれぞれの断面形状は全く同じであるということである。しかし、超音速流がその周りに流れたとき異なる流れ場が形成される。より厳密に言えば、衝撃波と物体表面の間の流れ場が異なる。

流れ場の大事な特性として、

- 同じ物体角 (半頂角) であれば、楔の方が衝撃波角度 (β) は大きくなる。これはまさに 2 次元性の影響で、2 次元の流れはスパン方向に逃げられないので影響が強くなる。その結果、物体の半頂角を増加させていったときに、円錐より楔の方が早く衝撃波が離脱 (detach) する。
- 円錐の場合、半頂角が 57.6° 以上になると、どんなマッハ数でも必ず衝撃波は離脱する。
- 楔の場合、衝撃波と物体表面の間の領域では、流れの各量は場所に依らず一定である。つまり、速度、圧力、密度、温度などがその領域内では、すべて同じ値を取る。
- 楔の場合、衝撃波通過後の流線はすべて直線となり、それらは楔の表面に平行である。
- 円錐の場合、衝撃波と円錐表面の間で、頂点から引いたひとつの直線 (C_1 ; 中心軸からの角度が θ_1) に沿っては、流れは同じ値を持つ。つまり、この直線の上では、速度も、圧力も、密度も、温度もすべて同じ値を取る。しかし、異なる直線 C_2 (中心軸からの角度が θ_2) では、速度、圧力、密度、温度などの値は C_1 上のものとは異なる。
- 円錐の場合、衝撃波を通過した後の流線は曲線となる。従って、発生する遠心力のため、円錐面上の方が、衝撃波のすぐ後ろより圧力が高くなる。

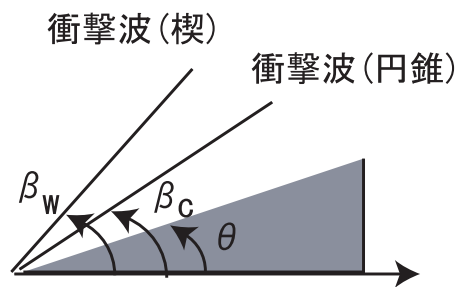


図 7.6: 楔 (くさび) と円錐における衝撃波角の違い

7.9 Taylor-Maccoll の関係式

軸対称流れで、衝撃波の先端が円錐の先端に付着している場合に成り立つ関係式である。このときの流れを錐状流 (conical flow) と呼ぶ。この式の誘導を以下に示す。

流れは定常で、軸対称で旋回流がないとする。座標系は、頂点を中心とする球座標 (r, θ, ϕ) とする。 r は頂点からの動径、 θ は物体中心軸からの角度である。また、 (r, θ, ϕ) 方向の速度成分を (V_r, V_θ, V_ϕ) とする。

ここで、以下の仮定を行う。

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0, \quad V_\phi = 0 \quad (7.124)$$

ここで、 ϕ は地球の経度方向の変化である。この場合には、周方向の変化に相当する。

また、錘状流近似のため、動径方向の変化はないとする。

$$\frac{\partial}{\partial r} = 0 \quad (7.125)$$

である。

球座標での連続の式 $\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$ を書き下すと、

$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho V_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (7.126)$$

となる。また、錘状流の関係式を適用すると

$$2\rho V_r + \rho V_\theta \cot \theta + \rho \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_\theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0 \quad (7.127)$$

となる。

ここでの流れでは、衝撃波が直線であるため、衝撃波通過後にエントロピーは変化しない。従って衝撃波を過ぎた流れには渦度は発生しない (Crocco の定理参照)。つまり、渦度は0となり、渦なし流れ (ポテンシャル流れ) である。渦度の各成分 ($\omega_r, \omega_\theta, \omega_\phi$) は以下ようになる。

$$\omega_r = (\nabla \times \vec{V})_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (r V_\phi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r V_\theta) \right\} = 0 \quad (7.128)$$

$$\omega_\theta = (\nabla \times \vec{V})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r V_\phi \sin \theta) \right\} = 0 \quad (7.129)$$

$$\omega_\phi = (\nabla \times \vec{V})_\phi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right\} = 0 \quad (7.130)$$

式 (7.130) を展開すると、

$$V_\theta + r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0 \quad (7.131)$$

となる。

錘状流の関係 (7.125) を使うと

$$V_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \quad (7.132)$$

となる。

オイラーの運動方程式より、流線方向 (s 方向) の運動方程式は

$$dp = -\rho V dV = -\rho d(V^2)/2 \quad (7.133)$$

となる (非圧縮性流体のテキスト参照)。ここでは ds は省略されている。 $V^2 = V_r^2 + V_\theta^2$ であるので、これを上式に代入して、

$$dp = -\rho(V_r dV_r + V_\theta dV_\theta) \quad (7.134)$$

となる。

流れは等エントロピー流であるので、音速 a は、

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2 \quad (7.135)$$

となる。式 (7.134) と式 (7.135) より

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{a^2} (V_r dV_r + V_\theta dV_\theta) \quad (7.136)$$

となる。

一方、全エンタルピーが一定の式より

$$H_0 = h + \frac{1}{2} V^2 = \frac{1}{2} V_{max}^2 \quad (7.137)$$

となる。ここで、 V_{max} は得られる最大速度で、これは $h = 0$ (つまり温度を 0) にしたときに達成できる。エンタルピー h は、

$$h = C_p T = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (7.138)$$

であるので、式 (7.137) と式 (7.138) より

$$a^2 = \frac{1}{2}(\gamma - 1)(V_{max}^2 - V^2) \quad (7.139)$$

となる。これを式 (7.136) に代入すると

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{V_r dV_r + V_\theta dV_\theta}{V_{max}^2 - V_r^2 - V_\theta^2} \right) \quad (7.140)$$

となる。

前述のように、 V_r と V_θ は θ だけの関数であるので、この式から、 ρ も θ だけの関数であることが分かる。従って、式 (7.127) の偏微分は以下のように常微分に変化する。

$$2\rho V_r + \rho V_\theta \cot \theta + \rho \frac{dV_\theta}{d\theta} + V_\theta \frac{d\rho}{d\theta} = 0 \quad (7.141)$$

式 (7.140) を θ で微分すると、

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{V_r \frac{dV_r}{d\theta} + V_\theta \frac{dV_\theta}{d\theta}}{V_{max}^2 - V_r^2 - V_\theta^2} \right) \quad (7.142)$$

となる。これを、式 (7.141) に代入すると

$$\frac{\gamma - 1}{2} (V_{max}^2 - V_r^2 - V_\theta^2) \left(2V_r + V_\theta \cot \theta + \frac{dV_\theta}{d\theta} \right) - V_\theta \left(V_r \frac{dV_r}{d\theta} + V_\theta \frac{dV_\theta}{d\theta} \right) = 0 \quad (7.143)$$

となる。

式 (7.132) を θ で微分すると (V_r が θ だけの関数であることを考慮)

$$\frac{dV_\theta}{d\theta} = \frac{d^2 V_r}{d\theta^2} \quad (7.144)$$

となる。これを式 (7.143) に代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma - 1}{2} \left(V_{max}^2 - V_r^2 - \left(\frac{dV_r}{d\theta} \right)^2 \right) \left(2V_r + \frac{dV_r}{d\theta} \cot \theta + \frac{d^2 V_r}{d\theta^2} \right) \\ & - \frac{dV_r}{d\theta} \left(V_r \frac{dV_r}{d\theta} + \frac{dV_r}{d\theta} \frac{d^2 V_r}{d\theta^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.145)$$

となる。これを整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma - 1}{2} \left(V_{max}^2 - V_r^2 - \left(\frac{dV_r}{d\theta} \right)^2 \right) \left(2V_r + \frac{dV_r}{d\theta} \cot \theta + \frac{d^2 V_r}{d\theta^2} \right) \\ & - \left(\frac{dV_r}{d\theta} \right)^2 \left(V_r + \frac{d^2 V_r}{d\theta^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.146)$$

となる。ちなみに、この式の中の V_{max} は式 (7.137) より、上流側の一様流の持つ H_0 から計算される。(ある流線上の H_0 は衝撃波を通過しても変化しない)

この方程式は数値的に解くことにより、 V_r が θ の関数として求められる。 V_r が分かれば、式 (7.132) より、 V_θ が分かる。

なお、式 (7.146) を解くためには境界条件が必要である。式 (7.146) は θ に関する 2 階の常微分方程式であるので、境界条件が 2 個必要である。ひとつの境界条件は円錐表面上にある。円錐表面上では $V_\theta = 0$ であるので、式 (7.132) から、

$$\left(\frac{dV_r}{d\theta}\right)_{\theta_w} = 0 \quad (7.147)$$

となる。もう一つの境界条件は衝撃波のところ ($\theta = \theta_s$) にあり、そこで斜め衝撃波通過後の流れの条件を満足させる。実際、 θ_s を与えると、そこでの衝撃波通過後の流れは決定される。

(参考文献) G.I.Taylor and J.D.Maccoll, The Air Pressure on a Cone Moving at High Speeds, Proc. Roy. Soc. London A, 139, 1933, pp. 279-311.

第8章 遷音速流

8.1 遷音速流とは

遷音速流では、航空機の翼面上に衝撃波が発生するようになる。実際の旅客機でも、B727, B737, B747等では翼面上に衝撃波が生じている。

遷音速流 (transonic flow) とは、その速度 V が局所音速 C に近い流れを言う。亜音速側の遷音速流と超音速側の遷音速流がある。局所マッハ数も 1 に近づく。

$$V \sim C, \quad M = \frac{V}{C} \sim 1 \quad (8.1)$$

このような流れでは、動圧と静圧が同じオーダーになる。

$$\frac{1}{2}\rho V^2 \sim p \quad (8.2)$$

理由は、前者を後者で割ると

$$\frac{(1/2)\rho V^2}{p} \sim \frac{1}{2} \frac{\gamma V^2}{\gamma p / \rho} \sim \frac{\gamma}{2} \left(\frac{V}{C}\right)^2 = \frac{\gamma}{2} M^2 \quad (8.3)$$

と表され、この式に $M \sim 1$ を代入すると、その値は $O(1)$ となる。

[参考] 上式は動圧 (dynamic pressure) と静圧 (static pressure) の比であるが、動圧そのものはマッハ数が $M = 1.4$ ぐらいで最大となり、その後、減少していく。これは、等エントロピーの関係式から得られる。

$$\frac{(1/2)\rho v^2}{(1/2)\rho_0 C_0^2} = \frac{\rho}{\rho_0} \times \left(\frac{v}{C}\right)^2 \times \left(\frac{C}{C_0}\right)^2 = M^2 \times \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \quad (8.4)$$

実際のロケット打ち上げにおいては、打ち上げから約 1 分後に動圧が最大となり、そのときのマッハ数は、約 $M = 1.5$ で、高度は約 10km である。[了]

遷音速流とは、 $M_\infty \simeq 1$ の流れであるので、翼面上で発生した擾乱は、ほぼ翼面に垂直方向 (y 方向) に遠方に伝播する。これは、後で勉強する超音速流での 2 つの波 (特性曲線) の傾きが、 $M_\infty \rightarrow 1$ のとき、 $\pm 90^\circ$ に近づくことから分かる。

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (8.5)$$

その結果、遷音速流の流線は亜音速や超音速に比べて外側に張り出すようになり、その分、抵抗も増加する。

このような流れには線形理論は適用できない。それは、亜音速流に対する線形理論方程式では

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (8.6)$$

となり、 $M_\infty \rightarrow 1$ のとき、左辺第1項が0に近づき、この項自体が小さな値となる。そこで、 $M_\infty \rightarrow 1$ の場合には、この式の代わりに、式(8.6)を導出するときには捨てていた項を右辺に追加し、大きさのバランスを取る。

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -M_\infty^2 (\gamma + 1) \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2M_\infty^2 \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (8.7)$$

通常、右辺第2項と第3項は省略される。

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -M_\infty^2 (\gamma + 1) \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (8.8)$$

遷音速流は、実際には、コンプレッサーやタービン、ヘリコプターのブレード、遷音速風洞、超音速風洞のスロート (throat) 付近、飛行機の空気取り入れ口 (inlet) 付近、ロケットのノズル (nozzle) 内などの流れで起こる。また、超音速飛行機でも、頭部付近で生じる。さらに、後退翼 (下流側に延びた翼) をもつ飛行機では、後退角 Λ とマッハ角 $\theta = \sin^{-1}(1/M_\infty)$ が $\Lambda + \theta = \pi/2$ 付近で、前縁に垂直な速度はほぼ音速になり、遷音速の扱いが必要になる。(後退角 $\Lambda = 0$ では、ちょうど主流のマッハ数が $M_\infty = 1$ のとき、前縁で音速となる。このとき、マッハ角は $\theta = \pi/2$ である。後退角をつけると ($\Lambda > 0$)、 $\theta < \pi/2$ のとき、前縁に垂直な速度が音速になる。つまり、主流のマッハ数が $M_\infty > 1$ のときである。緩和されたことになる。)

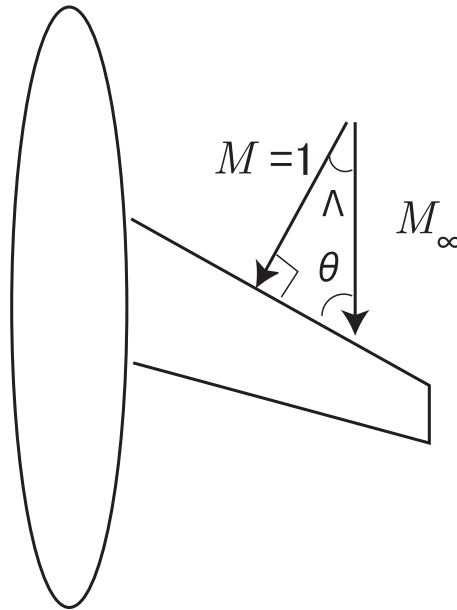


図 8.1: 前縁に垂直な流れが $M=1$ になる場合

8.2 高速翼

高速の翼では、主流が主翼にまともに当たると衝撃波が強くなり、その結果抵抗が増大するため、ほとんどが後退角 (Sweptback angle) を持っている。後退角とは、翼前縁と y 軸 (スパン方向) とのなす角であり、遷音速機は $\Lambda \sim 35^\circ$ の値を持つ。A310 では $\Lambda = 28^\circ$ 、ノースロップ・グラマンの爆撃機 B2(Bomber; 最大速度 $M=0.8$) は $\Lambda = 33^\circ$ 、B747(B747-400 の巡航速度は $M=0.85$) で $\Lambda = 37.5^\circ$

である。一方、超音速では、 $M = 1.4$ で後退角は $\Lambda = 45^\circ$ 程度、 $M = 2$ で $\Lambda = 60^\circ$ 程度である。コンコルド (巡航速度 (cruise speed) は $M=2.02$) は $\Lambda = 75^\circ$ の後退角を持っている。

後退翼は翼前縁に垂直方向のマッハ数成分 $M_n = M_\infty \cos \Lambda$ を小さくするために採用されている。この成分が 1 より大きい小さいかで流れのパターンが異なる。

- $M_n < 1$ であれば、亜音速前縁 (Λ が大きい場合)
- $M_n > 1$ であれば、超音速前縁 (Λ が小さい場合)

通常は、亜音速前縁が望ましい。

ちなみに、後退角と同じ効果を持つものに、前進角がある。実験機 X-29(1984 年) がその例である。前進翼 (forward-sweep wing) は構造的にはダイバージェンス特性が厳しい。つまり、動圧が増加すると回転角が無限大となる悪い特性が発生する。一方、後退角の場合には、翼端剥離 (翼端失速) が発生する。これを防ぐために、通常は翼を翼端に行くほどねじり下げ (washout) をつけ、翼端に行くほど、迎角を小さくする。

遷音速空気力学 (transonic aerodynamics) は、1970 年代に入ると急速に発展した。例えば、ピーキー翼 (peaky 翼) が提案され、ピーキー翼は前縁付近で曲率半径を大きくし (blunt にする)、そこで発生する膨張波で翼面上に発生する衝撃波を弱めている。また、Pearcey と Whitcomb による衝撃波のない超臨界翼 (shock-free supercritical wing) が提案され、遷音速領域の低速側での性能を向上させることに成功した。

(参考) Richard T. Whitcomb(1923-2009; NASA) は歴史に残る下記のものを開発し、航空科学技術に莫大な貢献をした。

- 遷音速エーリアルール (transonic area rule)
- 超臨界翼 (supercritical wing)
- 翼端小翼 (winglet)

8.2.1 ピーキー翼 (peaky airfoil)

ピーキー翼 (Peak airfoil) は、1962 年に英国の NPL(National Physical Laboratory) で Pearcey により開発された。実際には、DC8, DC9, A300B、また英国の航空機で使用された。翼の前縁部に部分的な超音速流による圧力分布のピークを作り、そこで発生する膨張波を利用して、その後に発生する衝撃波を弱め、造波抗力を減少させている。このように上面の前縁近くで圧力のピークがあるために、ピーキー翼と呼ばれる。低燃費のみならず、主翼後退角を小さくできるので、操縦性や安定性が向上する。例えば、ピーキー翼が、厚み比 $\tau = 0.08$ の場合、一様流マッハ数が $M_\infty = 0.73$ のとき、 $C_L = 0.77$ となる。この場合の上面での圧力分布は、前縁で C_p が -1.6 程度まで下がり (ピークとなる) その後、後縁に向かって、直線的に圧力が増大し、後縁では C_p が正の値をとる。

(参考) H.H.Pearcey, "The Aerodynamic Design of Section Shapes for Swept Wings," Advances in Aeronautical Sciences, Pergamon Press, Oxford, Vol. 3, 1962.

8.2.2 超臨界翼

通常の翼では、マッハ数が増加すると、局所的に超音速領域 (supercritical region) が生じる。ここを通った流れが亜音速に戻るときに衝撃波が発生する。亜音速になり、圧力回復が起こり、理想的には後縁で激み圧に達する（実際には境界層があるために境界層の外側の流れは後縁点付近で激むことなくそのまま下流方向に流れ過ぎてします。その結果、圧力は激み圧まで上昇しない、別の言い方として、激み圧まで回復しない）。翼表面上で超音速になった流れを等エントロピー的に速度を0にすると、後縁での激み圧に到達することが出来ない。そこで、途中で衝撃波が発生し、圧力を上げることになる。これが、翼面上で衝撃波が発生する理由である。

翼面上で衝撃波が発生すると、衝撃波直後に急激に圧力が上昇する。その結果、境界層が剥離し、揚力が低下し、抵抗が増大する。ちなみに、翼表面での境界層の剥離には2種類あり、一つは、ここで述べたような衝撃波と境界層の干渉であり、もう一つは、翼の後縁で起こる剥離である。

マッハ数を亜音速状態で上昇させたときに、この衝撃波が急速に強くなるときの、一様流のマッハ数を抵抗発散マッハ数 (M_{DD} ; Drag Divergence Mach number) と呼ぶ。あるいは、衝撃失速 (shock stall) が起こるマッハ数を抵抗発散マッハ数と呼ぶ。飛行機の翼としては、この抵抗発散マッハ数を大きくすることが課題である。これにより少しでも大きいマッハ数で飛ぶことが出来る。飛行機の効率は、 $M_\infty \times L/D$ に比例すると言われている。マッハ数を上げることは大事なことである。ちなみに、衝撃波が生じると抵抗が大きくなるとともに、揚力も急減し (lift divergence)、モーメントも大きく変化する。

このようなことに対処するため、超臨界翼 (supercritical wing) が、NASA Langley 研究所の Richard Whitcomb により 1964 年開発された。これにより、抵抗発散マッハ数を通常の翼型の 12 – 14% 増加させることが可能となった。例えば、通常の翼型である $NACA64_1 - 212$ (6 シリーズの翼型は翼面上に現れる超音速流を弱めるための翼型で、最後の 12 は 12% の厚み比を表す) では、 $M_{DD} \simeq 0.7$ であるのに、超臨界翼では $M_{DD} \simeq 0.81$ である。

超臨界翼 (スーパークリティカル翼) の特徴は

- 大きな前縁半径 (blunt nose; 構造的な面や、燃料タンクとしてメリットがある)
- 上面あるいは下面の真ん中辺りは大きな曲率 (つまりフラット)
- 厚みのある後縁と小さな後縁角
- 下面後半部の凹み

例えば、超臨界翼は厚み比は $\tau = 0.11$ で、巡航速度 $M_\infty = 0.8$ での揚力係数は、 $C_L = 0.61$ である。

ピーキー翼をさらに進歩させて、衝撃波の位置を翼の後縁部に来るようにした。翼表面上での超音速領域を広げ、飛行速度を音速に近づけた。巡航速度 $M_\infty = 0.8$ 、揚力係数 $C_L = 0.61$ のとき、上面の圧力係数は、 C_p が約-0.8 のほぼ一定の領域が、翼弦長の 7 割ぐらいまで存在する。つまり、圧力分布はフラットになる。

1965 年に NASA で考案され、1969 年 NASA が、Whitcomb の考えた超臨界翼を、Vought F-8 Crusader で実験機として飛ばすことを表明した。1971~1972 年に各国で特許が出願された。

同じ翼厚比でも、巡航マッハ数を 15% 増加できる。同じ巡航マッハ数であれば、抗力を増さないで、構造重量を減少できる。例えば、DC10, L1011, C5A で採用されている。

8.3 波動抵抗

造波抵抗あるいは波動抵抗 (wave resistance, あるいは wave drag) と呼び、これは空気の圧縮性が原因している。亜音速長距離旅客機では全抵抗の 3% 程度であるが、超音速旅客機になると、20% 程度になる。

波動抵抗係数 (波動抵抗を、動圧と基準面積を掛けたもので割って無次元化したもの) は、 $M = 0.8$ 程度から増加して、 $M = 1.4$ 程度で最大となり、その後、マッハ数が増加するとともに少しずつ減少していく。

衝撃波の前の総圧 p_{01} と衝撃波の後の総圧 p_{02} の比は

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} < 1 \quad (8.9)$$

となるので、この総圧損失が波動抵抗となる。

これに伴い、エントロピーは増加する。式 (7.52) から、

$$\exp\left(\frac{S_2 - S_1}{R}\right) = \frac{p_{01}}{p_{02}} \rightarrow \frac{S_2 - S_1}{R} = \ln \frac{p_{01}}{p_{02}} \quad (8.10)$$

となる。物体の後流を主流に垂直方向にトラバースして、総圧分布を測定すれば、上式から、エントロピー分布を計算できる。

8.4 遷音速流でのエントロピー上昇

遷音速流ではたとえ衝撃波が生じてもエントロピーの変化が小さいと考えられる。衝撃波を横切る場合を考える。衝撃波の強さを P とし、以下のように定義する。

$$P = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} - 1 \quad (8.11)$$

圧力比とマッハ数に関する関係式 (7.11) より

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (8.12)$$

が得られる。これを式 (8.11) に代入すると衝撃波の強さ P は、衝撃波流入マッハ数 M_1 を使って次のように表される。

$$P = \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \quad (8.13)$$

一方、衝撃波を横切ったの密度の変化に対しては、ランキン・ユゴニオの関係式 (7.32) より

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = \frac{\frac{\gamma+1}{2\gamma} P + 1}{\frac{\gamma-1}{2\gamma} P + 1} \quad (8.14)$$

となる。

エントロピー変化は、式 (7.40) より、

$$s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + C_p \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} = C_v \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma \quad (8.15)$$

となる。この式に、式 (8.11) と式 (8.14) を代入すると

$$\frac{s_2 - s_1}{C_v} = \ln(1 + P) - \gamma \ln \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} P\right) + \gamma \ln \left(1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} P\right) \quad (8.16)$$

となる。

弱い衝撃波の場合 (マッハ数が 1 に近い場合) には、 $P \ll 1$ であるので、

$$\frac{s_2 - s_1}{C_v} = \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} P^3 - \frac{\gamma^2 - 1}{8\gamma^2} P^4 + \dots \quad (8.17)$$

あるいは、式 (7.54) を使えば、

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma + 1}{12\gamma^2} P^3 - \frac{\gamma + 1}{8\gamma^2} P^4 + \dots \quad (8.18)$$

となる。

従って、エントロピーの上昇は、圧力上昇比の 3 乗に比例する。従って、圧力比が小さいときには、エントロピーの変化が小さい。クロッコ (Crocco) の定理に基づけば、エントロピーがほとんど変化しない場合は渦度が発生しないことになり、渦なしながれと考えてよい。その結果、流れ場は、ポテンシャル流と近似できる。遷音速流でポテンシャル流を使った計算が近似的に行われるのはこの理由による。

エントロピー変化を衝撃波の前のマッハ数 M_1 で表せば

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2} (M_1^2 - 1)^3 - \frac{2\gamma^2}{(\gamma + 1)^2} (M_1^2 - 1)^4 + \dots \quad (8.19)$$

となる。

8.5 遷音速相似則

通常、微小擾乱理論では、流れのマッハ数 M_∞ は固定した状態で、翼の厚み比 τ を $\tau \rightarrow 0$ にすることができる。これに対して、遷音速擾乱理論では、 $\tau \rightarrow 0$ にしたとき、一様流のマッハ数も $M_\infty \rightarrow 1$ にもっていくと考える。

8.5.1 遷音速相似パラメータ

相似則は、例えば、2 つの流れの間の力学的相似であり、最初に、von Karman により導かれた。遷音速流における微小擾乱方程式は、式 (8.8) を 3 次元に拡張すると、

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = - \frac{M_\infty^2 (\gamma + 1)}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (8.20)$$

となる。一様流のマッハ数が 1 に近づくと、左辺だけの線型方程式は不正確となるので、この非線型方程式を用いる。ここで、 x は主流方向、 y はスパン方向、 z は厚み方向である。

式 (8.20) の無次元化を考える。

$$\frac{(1 - M_\infty^2) \tilde{\phi}}{X^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\tilde{\phi}}{Y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\tilde{\phi}}{Z^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = - \frac{M_\infty^2 (\gamma + 1) \tilde{\phi}^2}{V_\infty X^3} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (8.21)$$

ここで、各量は以下の有次元量を用いて無次元化されている。

$$x \rightarrow X, \quad y \rightarrow Y, \quad z \rightarrow Z, \quad \phi \rightarrow \tilde{\phi} \quad (8.22)$$

実験条件が異なっても、同じ式で表されるためには、係数間の比が同じでなければならない。

$$\frac{(1 - M_\infty^2) \tilde{\phi}}{X^2} : \frac{\tilde{\phi}}{Y^2} : \frac{\tilde{\phi}}{Z^2} : \frac{M_\infty^2 (\gamma + 1) \tilde{\phi}^2}{V_\infty X^3} = \text{const} \quad (8.23)$$

支配方程式だけでなく、境界条件も2つの流れで同一である必要がある。

$$\frac{w}{V_\infty} = \tau \frac{\partial}{\partial(x/l)} f\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{b}\right) \quad (8.24)$$

ここで、 τ は厚み比である。左辺は、微小擾乱理論では

$$\frac{w}{V_\infty} = \frac{\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0}}{V_\infty} \quad (8.25)$$

となる。従って、式(8.24)は、

$$\frac{\tilde{\phi}}{V_\infty Z} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} = \tau \frac{\partial}{\partial(x/l)} f\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{b}\right) \quad (8.26)$$

となる。ここで、 $l \rightarrow X$, $b \rightarrow Y$ に相当する。式(8.26)より、2つの流れが相似であるためには、

$$\frac{\tilde{\phi}}{V_\infty Z} = \text{const} \quad (8.27)$$

となる必要がある。

式(8.23)で、 x と z 方向の関係を考える。つまり、第1項と第3項の関係を考える。

$$\frac{(1 - M_\infty^2)\tilde{\phi}}{X^2} : \frac{\tilde{\phi}}{Z^2} = \text{const} \quad (8.28)$$

従って、

$$\frac{(1 - M_\infty^2)Z^2}{X^2} = \text{const} = C^2 \rightarrow Z = \frac{CX}{(1 - M_\infty^2)^{1/2}} \quad (8.29)$$

となる。ここで、一定値を C^2 と置いている。式(8.29)を式(8.27)に代入すると

$$\frac{\tilde{\phi}}{V_\infty \tau} \frac{1(1 - M_\infty^2)^{1/2}}{X} = \text{const} \quad (8.30)$$

となる。

また、式(8.23)の第1項と第4項の関係より

$$\frac{(1 - M_\infty^2)\tilde{\phi}}{X^2} : \frac{M_\infty^2(\gamma + 1)\tilde{\phi}^2}{V_\infty X^3} = \text{const} \rightarrow \frac{\tilde{\phi}}{V_\infty X} \cdot \frac{M_\infty^2(\gamma + 1)}{1 - M_\infty^2} = \text{const} \quad (8.31)$$

となる。式(8.30)を式(8.31)で割ると

$$\frac{(1 - M_\infty^2)^{3/2}}{M_\infty^2(\gamma + 1)\tau} = \text{const} \quad (8.32)$$

となる。この式を $2/3$ 乗すると

$$\frac{1 - M_\infty^2}{[M_\infty^2(\gamma + 1)\tau]^{2/3}} = \text{const} \quad (8.33)$$

となる。この constant を χ とおくと、

$$\chi = \frac{1 - M_\infty^2}{[M_\infty^2(\gamma + 1)\tau]^{2/3}} \quad (8.34)$$

となる。これが遷音速パラメータ χ である。

異なる厚み比 τ_1, τ_2 を持つ物体まわりの異なるマッハ数 M_1, M_2 の流れを関係付ける。遷音速パラメータが等しくなれば、

$$\frac{1 - M_1^2}{[M_1^2(\gamma + 1)\tau_1]^{2/3}} = \frac{1 - M_2^2}{[M_2^2(\gamma + 1)\tau_2]^{2/3}} \quad (8.35)$$

これら2つの流れは、相似になる。つまり、変換された空力係数は、どちらの場合も同じ値をとることになる。このように、 χ という横軸に対して、データが1つの線の上に乗ることになる。

8.5.2 空力係数の相似則

ここでは、空力係数がこの遷音速相似パラメータ χ で表されることを示す。
まず、圧力係数は、式 (5.17) より、

$$C_p = -\frac{2u}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2\tilde{\phi}}{V_\infty X} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (8.36)$$

となる。

2つの流れの圧力係数が相似であるためには、

$$\frac{C_p}{\frac{\tilde{\phi}}{V_\infty X}} = \text{const} \quad (8.37)$$

である必要がある。

これに、式 (8.31) の関係を代入すると

$$\frac{C_p(\gamma+1)M_\infty^2}{1-M_\infty^2} = \text{const} \quad (8.38)$$

となる。

この式では、 $M_\infty \rightarrow 1$ になると、無限大になってしまうので、分母の $(1-M_\infty^2)$ に遷音速パラメータに関する式 (8.33) を代入する。

$$\frac{C_p(\gamma+1)M_\infty^2}{[(\gamma+1)M_\infty^2\tau]^{2/3}} = \text{const} \quad (8.39)$$

従って

$$C_p \cdot \frac{[(\gamma+1)M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{2/3}} = \text{const} \quad (8.40)$$

となる。これを変換された圧力係数 \tilde{C}_p とする。

$$\tilde{C}_p = C_p \cdot \frac{[(\gamma+1)M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{2/3}} \quad (8.41)$$

このように置けば、2つの流れは同じ圧力係数（変換された）の値を示す。つまり、1本の線の上に乗ることになる。

以上まとめると、空力係数に関して、遷音速流3次元翼の相似則として、変換された各係数に対して、以下の関係が得られる。

$$\tilde{C}_p = C_p \frac{[(\gamma+1)M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{2/3}} = f_p(\chi, \tilde{AR}) \quad (8.42)$$

$$\tilde{C}_L = C_L \frac{[(\gamma+1)M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{2/3}} = f_L(\chi, \tilde{AR}) \quad (8.43)$$

$$\tilde{C}_M = C_M \frac{[(\gamma+1)M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{2/3}} = f_M(\chi, \tilde{AR}) \quad (8.44)$$

$$\tilde{C}_D = C_D \frac{[(\gamma+1)M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{5/3}} = f_D(\chi, \tilde{AR}) \quad (8.45)$$

ここで、 χ は遷音速パラメータで、 \tilde{AR} は換算アスペクト比である。ここで、注意することは、抵抗係数の場合、分母に厚み比 τ が余計に掛かっていることである。この理由としては、楔の上半分だ

けを考えてみる。主流方向の長さを l とし、厚さを t とする。この楔の斜面に圧力 p が作用しているとき、抵抗 D は、

$$D \sim p\theta l \quad (8.46)$$

となる。従って、抵抗係数 C_D は、

$$C_D = \frac{D}{(1/2)b\rho_\infty U_\infty^2 l} \sim \frac{p\theta l}{(1/2)b\rho_\infty U_\infty^2 l} \sim C_p\theta = C_p\tau \quad (8.47)$$

である。ここで、楔の半頂角 θ が小さい場合には、

$$\tan\theta = \frac{t}{l} = \tau \rightarrow \theta \sim \tau \quad (8.48)$$

となり、これが使われている。式 (8.40) の分母と分子にそれぞれ τ を掛けると、

$$C_p\tau \cdot \frac{[(\gamma+1)M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{5/3}} = \text{const} \quad (8.49)$$

となる。式 (8.47) を代入すると、

$$C_D \cdot \frac{[(\gamma+1)M_\infty^2]^{1/3}}{\tau^{5/3}} = \text{const} = \tilde{C}_D \quad (8.50)$$

となる。

換算アスペクト比 \tilde{AR} に関しては、

$$\tilde{AR} = [(\gamma+1)M_\infty^2]^{1/3} AR \quad (8.51)$$

として定義される。これは、式 (8.23) の第 1 項を第 2 項で割ると

$$\frac{(1-M_\infty^2)Y^2}{X^2} = \text{const} \rightarrow \frac{\sqrt{1-M_\infty^2}Y}{X} = \text{const} \quad (8.52)$$

となる。

$$\frac{Y}{X} = \text{const} = AR \quad (8.53)$$

より

$$\sqrt{1-M_\infty^2} AR = \text{const} \quad (8.54)$$

となる。

遷音速領域では、 $M_\infty \rightarrow 1$ になったとき、有限のアスペクト比では式 (8.54) は 0 に近づいてしまい、不適当であるので、遷音速パラメータ (8.33) (実際にはその平方根)

$$\frac{\sqrt{1-M_\infty^2}}{[(\gamma+1)M_\infty^2\tau]^{1/3}} = \text{const} \quad (8.55)$$

を使用して、式 (8.54) を式 (8.55) で割ると

$$[(\gamma+1)M_\infty^2\tau]^{1/3} AR = \text{const} = \tilde{AR} \quad (8.56)$$

となる。これが換算されたアスペクト比である。

ちなみに、翼の空力特性は、翼の断面形とアスペクト比 AR によって決定される。アスペクト比が大きいほど誘導抗力 C_{Di} は小さい。

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR} \quad (8.57)$$

抵抗が小さくなると、揚抗比 L/D が増大する。つまり、航続距離が大きくなる。また、揚力傾斜 $dC_L/d\alpha$ (単位迎角に対する揚力の増加量) も増大する。また、翼弦長が小さくなるので、風圧中心の絶対的な移動量は小さくなる。これは、性能や安定性の向上につながる。その一方で、アスペクト比が大きくなると、構造的には苦しくなる。また、アスペクト比が大きくなると、抵抗発散マッハ数 M_{DD} も減少する。ちなみに、実際の航空機のアスペクト比を表 8.1 に示す。アスペクト比はおおよそ、 $AR = 7 \sim 9$ である。

航空機	アスペクト比 (AR)
B727	7.20
B747	6.96
A310-200	8.80
DC-10-40	7.50

表 8.1: 航空機のアスペクト比

8.6 エリアルール

エリアルール (断面積則) は、航空機を設計する上で大変重要な性質である。機体の空気抵抗の減少を胴体と翼を一体にして考え、機軸方向に断面積をスムーズに分布させることで、抵抗を減少できるというものである。NACA の Richard Whitcomb が 1953 年頃考え出した。ちなみに、Richard Whitcomb は、1980 年 37 年間勤めた NASA を定年で辞めたが、在職中、以下のすばらしい研究開発を行った。(1956 年には、NACA Distinguished Service Medal を受賞)

- エリアルール： 超音速航空機の抵抗を大きく減少
- ウイングレット (winglet)： 翼端渦による抵抗を減少
- 超臨界翼： 境界層剥離の高亜音速翼への影響を遅らせる

米国コンペアー社の全天候型戦闘機 YF102 がなかなか音の壁を突破できずに、最高速度が $M=0.98$ で停滞していた。エリアルールを適用して、翼の付いている部分の胴体をくびれた形状にしたところ (つまり、胴体と翼の軸方向断面積変化をスムーズにした) 同じパワーで難なく音速を突破できた。このように、エリアルールは、F-102 Delta Dagger (1953 年初飛行) で初めて採用された。

8.7 波動抵抗最小物体

我々は、物体を高速飛行させる場合、できるだけ抵抗の小さい形状を使いたい。細長物体の形状は、一般に物体の軸に沿って吹き出し (source)・吸い込み (sink) を分布させることで表現できる。そのときの発生する波動抵抗 (wave drag) は以下の式で表される。(吹き出し・吸い込みについてはテキスト「非圧縮性流体力」を参照のこと)

$$D_w = -\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{4\pi} \int_0^l \int_0^l f'(x)f'(\xi) \ln|x-\xi| dx d\xi \quad (8.58)$$

ここで、 f' は断面積 $S(x)$ の軸方向変化率である。つまり、

$$f(x) = \frac{dS(x)}{dx} \quad (8.59)$$

である。

回転体の軸方向の座標 x を θ で表す。

$$x = \frac{l}{2}(1 + \cos \theta) \quad (8.60)$$

従って、座標の対応は、

$$0 \leq x \leq l \rightarrow \pi \geq \theta \geq 0 \quad (8.61)$$

となる。

断面積の軸方向変化率 f をこの θ で展開する。

$$f = l \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (8.62)$$

となる。これを式 (8.58) に代入して計算すると、

$$D_w = \frac{\pi \rho_{\infty} U_{\infty}^2 l^2}{8} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 \quad (8.63)$$

となる。この誘導は、テキスト「非圧縮性流体力学」の中の誘導抗力の箇所で使用されている方法とまったく同じであるので、参照されたい。

式 (8.62) に対する断面積の軸方向分布は、

$$S(x) = \int_0^x f(x) dx = \int_{\theta}^0 f(\theta) (-l/2) \sin \theta d\theta \quad (8.64)$$

となり、これを計算すると、

$$S(\theta) = \frac{l^2}{4} \left\{ A_1 \left(\pi - \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} \right) \right\} \quad (8.65)$$

となる。

この物体の体積 V は、

$$V = \int_0^l S(x) dx = \frac{\pi l^3}{8} \left(A_1 - \frac{1}{2} A_2 \right) \quad (8.66)$$

となる。

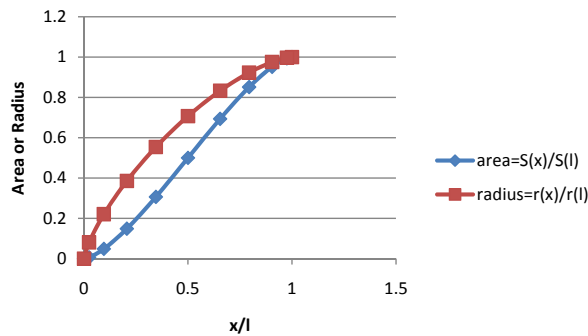


図 8.2: Karman ogive 形状

以上述べたことに基づき、以下の 2 つの物体形状を議論する。

- ベースがある場合 (von Karman ogive body):

$x = l$ に相当する $\theta = 0$ を式 (8.65) に代入すると、

$$S(l) = S(\theta = 0) = \frac{\pi l^2}{4} A_1 \rightarrow A_1 = \frac{4S(l)}{\pi l^2} \quad (8.67)$$

となる。式(8.63)から、

$$A_n = 0 \quad n \geq 2 \quad (8.68)$$

であれば、抵抗 D_w は最小になる。このときの抵抗値は、

$$D_w = \frac{2\rho_\infty U_\infty^2}{\pi} \frac{[S(l)]^2}{l^2} \quad (8.69)$$

となる。また、抵抗係数は、

$$C_{Dw} = \frac{4}{\pi} \frac{S(l)}{l^2} \quad (8.70)$$

となる。この物体の断面積分布は

$$S(\theta) = \frac{S(l)}{\pi} \left(\pi - \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \quad (8.71)$$

となる。この物体形状を von Karman ogive body と呼ぶ。図(8.2)を参照。(ogive とは筆先のような形のものをいう)

- ベース部がない場合(つまり後縁が尖っている場合; Sears-Haack body)
この場合には、先端と後端で尖っている。つまり、 $\theta = 0$ で $S = 0$ であるので、式(8.65)から、 $A_1 = 0$ となる。その結果、体積 V を一定とすれば、式(8.66)から

$$A_2 = -\frac{16V}{\pi l^3} \quad (8.72)$$

となる。抵抗(8.63)が最小になるには、他の係数が0の場合で、従って、そのとき抵抗は

$$D_w = \frac{64V^2}{\pi l^4} \rho_\infty U_\infty^2 \quad (8.73)$$

となる。この物体の最大断面積は、 $x = l/2$ のときで、その時の断面積は、

$$C_{Dw} = \frac{24V}{l^3} \quad (8.74)$$

となる。これを使って、抵抗係数を求めると、

$$C_{Dw} = \frac{24V}{l^3} \quad (8.75)$$

となる。体積を一定とすれば、長さの3乗で抵抗が小さくなることに注意されたい。航空機や宇宙機の長さを長くすればするほど抵抗は小さくなる。

この形状に対する断面積分布は、

$$S(\theta) = \frac{4V}{\pi l} \left(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta \right) \quad (8.76)$$

となる。これを、Sears-Haack body と呼ぶ。図8.3を参照のこと。

(問題) 式(8.71)や式(8.76)の形状が正しいかを確認するために、別のアプローチを使って、例えば、GAなど最適化の手法を用いて求めよ。

(参考) マッハ数と共に球の抵抗係数がどのように変化するかを図8.4に示す。低速では $C_D \simeq 0.4$ であるが、マッハ数とともに増大し、 $M = 1.5$ 付近で、 $C_D \simeq 1.0$ となり、その後、減少し、極超音速に近づくにつれて一定値となる。この現象を mach independence と呼ぶ。(了)

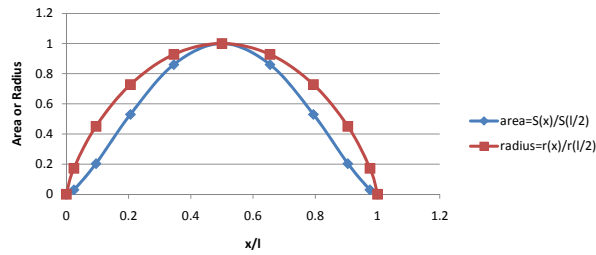


図 8.3: Sears Haack 形状

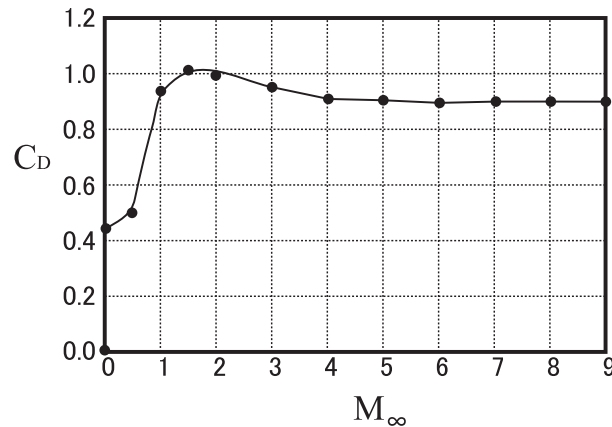


図 8.4: マッハ数による球の抵抗係数変化

8.8 衝撃波・境界層干渉

遷音速流では翼表面に発生する衝撃波と境界層が干渉を起こす。特に層流 (laminar flow) の場合にはラムダ型衝撃波が発生する。

流れが衝撃波を通り過ぎると圧力が上昇する、つまり衝撃波による大きい逆圧力勾配 (adverse pressure gradient) のため、衝撃波直後の圧力上昇が境界層の中を伝わって上流に伝播し、そこから剥離が発生する。乱流になると剥離を抑える効果があるため、層流ほど大きなラムダ形状の衝撃波を発生しない。いずれにせよ、後流 (wake) の幅が増大し、それに伴い、実質的に翼型が変化するため、揚力係数の減少や抗力係数の増加につながる。

なお、衝撃波・境界層干渉は極超音速流でも重要で、特に極超音速ではこの干渉による空力加熱率 (heat flux) の上昇が問題となる。これに関しては第 11 章を参照されたい。

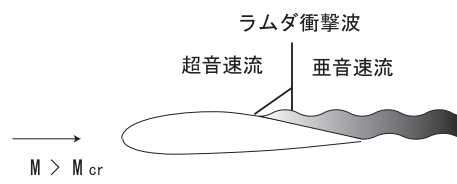


図 8.5: 衝撃波・境界層干渉：ラムダ衝撃波

第9章 超音速流

ここでは、音速より速い流れである超音速流 (supersonic flow) について勉強する。この流れでは、流れが音速より速いために、流れの中に発生した擾乱が上流に伝播できずに、下流側のみ伝わる (擾乱の伝播速度は音速である)。飛行機が超音速で我々に向かって飛んできた場合、来るまでその存在を感知できない。通り過ぎた後で初めてその衝撃が伝わり、飛んできた来たことが分かることになる。

9.1 超音速流とは

- 航空機周りの流れにして関して言えば、飛行速度が $M = 1.5 \sim 5.0$ の領域である。
- 理論と実際のデータが良く一致するので、遷音速流のときより空力的な設計は楽である。
- 空気との摩擦による熱の発生がマッハ数の増加とともに大きくなり、構造的には難しくなる。(thermal barrier)
- 航空機開発の歴史の中で、最初のころは音の壁は大きかった (1947年の X-1 がパイロット操縦による初の超音速飛行)。
- 英国とフランスの共同開発であるコンコルドは $M=2$ で、また米国の偵察機 SR71 は $M=3$ で飛行する。

9.2 特性曲線理論

特性曲線 (characteristic) は、ポテンシャル流 (渦度の無い流れ) でも、渦度のある流れ (rotational flow) でも存在する。双曲型方程式 (hyperbolic equation) に固有な特性で、この特性を上手に使えば、双曲型方程式をより簡単に、あるいはより精度良く解くことができる (つまり流れ場が明らかになる)。

- 2次元流の場合：
 - ポテンシャル流の特性曲線は、流線に対して $\pm\mu$ の傾きを持つマッハ波だけである (μ はマッハ角)。
 - 一方、渦度のある流れでは、マッハ波の他に流線も特性曲線の一つに入って来る。その理由は、渦度のある流れでは、流線毎にエントロピーが異なるからである。
- 軸対称流の場合
 - 特性曲線の上で成立する常微分方程式を数值的に解く必要がある。

これ以降は、二次元のポテンシャル流について考える。先ず最初に以下の2つの偏微分方程式を取り上げる。

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} + C_1 \frac{\partial v}{\partial x} + D_1 \frac{\partial v}{\partial y} + E_1 = 0 \quad (9.1)$$

$$A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + C_2 \frac{\partial v}{\partial x} + D_2 \frac{\partial v}{\partial y} + E_2 = 0 \quad (9.2)$$

ここで、係数 A, B, C, D は x, y, u, v のみの関数である。つまり、 $\partial u/\partial x$ などの1階微分を含まない。これを準線形 (quasi-linear) と呼ぶ。ここで、この式を (x, y) 座標から (ξ, η) 座標に変換する。 (ξ, η) 座標での式がこれから求める特性曲線になる。

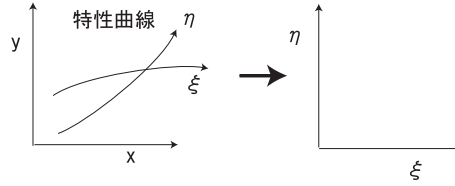


図 9.1: 特性曲線 (ξ 線と η 線) への方程式の変換

微分の変換を鎖則 (chain rule) を用いて行う。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (9.6)$$

式 (9.3) から式 (9.6) を式 (9.1) に代入すると

$$A_1(\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta) + B_1(\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta) + C_1(\xi_x v_\xi + \eta_x v_\eta) + D_1(\xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta) + E_1 = 0 \quad (9.7)$$

となる。ここで、添え字 x, y, ξ, η は x, y, ξ, η での微分を表す。この式を $u_{xi}, v_\xi, u_\eta, v_\eta$ に関して整理すると

$$(A_1 \xi_x + B_1 \xi_y) u_\xi + (C_1 \xi_x + D_1 \xi_y) v_\xi + (A_1 \eta_x + B_1 \eta_y) u_\eta + (C_1 \eta_x + D_1 \eta_y) v_\eta + E_1 = 0 \quad (9.8)$$

となる。同じことを式 (9.2) に対して行うと

$$(A_2 \xi_x + B_2 \xi_y) u_\xi + (C_2 \xi_x + D_2 \xi_y) v_\xi + (A_2 \eta_x + B_2 \eta_y) u_\eta + (C_2 \eta_x + D_2 \eta_y) v_\eta + E_2 = 0 \quad (9.9)$$

となる。

式 (9.8) と式 (9.9) は行列の形で、次のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} A_1 \xi_x + B_1 \xi_y, & C_1 \xi_x + D_1 \xi_y \\ A_2 \xi_x + B_2 \xi_y, & C_2 \xi_x + D_2 \xi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\xi \\ v_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

ここで、

$$\begin{aligned} X &= -(A_1 \eta_x + B_1 \eta_y) u_\eta - (C_1 \eta_x + D_1 \eta_y) v_\eta - E_1 \\ Y &= -(A_2 \eta_x + B_2 \eta_y) u_\eta - (C_2 \eta_x + D_2 \eta_y) v_\eta - E_2 \end{aligned} \quad (9.11)$$

つまり、式 (9.10) では ξ 方向の微分値を取り出して、これについて考えていく。

9.2.1 特性条件式

ξ 方向に A の領域と B の領域を任意に接続できるためには、 ξ 方向の微分が不定 (indefinite) でなければならない。そのためには、式 (9.10) の係数行列が 0 になる必要がある。

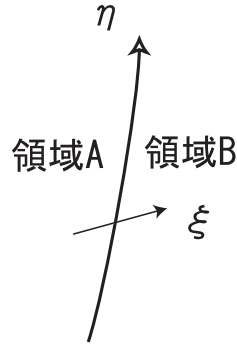


図 9.2: 領域 A の後に任意の値を持つ領域 B を接続 (ξ 方向)

$$\begin{vmatrix} A_1\xi_x + B_1\xi_y, & C_1\xi_x + D_1\xi_y \\ A_2\xi_x + B_2\xi_y, & C_2\xi_x + D_2\xi_y \end{vmatrix} = 0 \tag{9.12}$$

この式を展開すると、

$$a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0 \tag{9.13}$$

が得られる。ここで、

$$a = A_1C_2 - A_2C_1, \quad b = A_1D_2 - A_2D_1 + B_1C_2 - B_2C_1, \quad c = B_1D_2 - B_2D_1 \tag{9.14}$$

である。

同様なことが η 方向に対しても得られる (ξ 分枝を横切る方向に任意の値を持つ領域を接続できるようにする)。

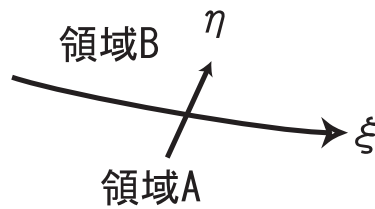


図 9.3: 領域 A の後に任意の値を持つ領域 B を接続 (η 方向)

式 (9.8) と式 (9.9) を u, v の η 微分で整理して、同様な操作を行うと、

$$\begin{vmatrix} A_1\eta_x + B_1\eta_y, & C_1\eta_x + D_1\eta_y \\ A_2\eta_x + B_2\eta_y, & C_2\eta_x + D_2\eta_y \end{vmatrix} = 0 \tag{9.15}$$

となり、展開すると

$$a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0 \tag{9.16}$$

が得られる。しかし、これらの式は従属変数が (ξ, η) で独立変数が (x, y) であるので、 (x, y) 面上での ξ あるいは η の分布を表すことになる。

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (9.17)$$

しかし、実際には、 $\xi = \text{const}$ の曲線（その上では η のみが増加する） $y = f(x)$ 、あるいは $\eta = \text{const}$ の曲線（その上では、 ξ のみが増加する） $y = g(x)$ を知りたい。

ここで、パラメータ σ を導入する。この σ は、 ξ か η かどちらかを表す。

$$x = x(\sigma), \quad y = y(\sigma) \quad (9.18)$$

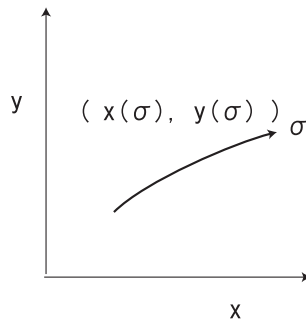


図 9.4: パラメータ σ による特性曲線の (x, y) 座標

式 (9.17) から、 $\sigma = \sigma(x, y)$ と置けるので、

$$\sigma - \sigma(x, y) = 0 \quad (9.19)$$

と書ける。式 (9.19) より、 y は σ と x の関数であるので、この式を x で微分すると

$$0 - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_y - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\sigma = 0 \quad (9.20)$$

となる。この式を $(\partial \sigma / \partial y)_x$ で割ると

$$\frac{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_x} = - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\sigma \quad (9.21)$$

となる。右辺は、 $\sigma = \xi$ であれば、

$$- \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\xi = - \left(\frac{dy}{dx}\right)_\xi \quad (9.22)$$

となる。同様に、 $\sigma = \eta$ であれば、

$$- \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\eta = - \left(\frac{dy}{dx}\right)_\eta \quad (9.23)$$

となる。このことから、式 (9.21) の左辺と右辺では、微分される変数と微分する変数が逆転している事がわかる。

そこで、式 (9.15) を η_y^2 で割る。

$$\begin{vmatrix} A_1 \frac{\eta_x}{\eta_y} + B_1, & C_1 \frac{\eta_x}{\eta_y} + D_1 \\ A_2 \frac{\eta_x}{\eta_y} + B_2, & C_2 \frac{\eta_x}{\eta_y} + D_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.24)$$

この式に式 (9.21) を代入すると

$$\begin{vmatrix} A_1 \left(-\frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}} \right) + B_1, & C_1 \left(-\frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}} \right) + D_1 \\ A_2 \left(-\frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}} \right) + B_2, & C_2 \left(-\frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}} \right) + D_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.25)$$

となる。この式に、 $-(dx/d\xi)^2$ を掛けると

$$\begin{vmatrix} A_1 \frac{dy}{d\xi} - B_1 \frac{dx}{d\xi}, & C_1 \frac{dy}{d\xi} - D_1 \frac{dx}{d\xi} \\ A_2 \frac{dy}{d\xi} - B_2 \frac{dx}{d\xi}, & C_2 \frac{dy}{d\xi} - D_2 \frac{dx}{d\xi} \end{vmatrix} = 0 \quad (9.26)$$

となる。

この式を展開すると、 ξ 線に対して ($\eta = const$) に対して

$$ay_\xi^2 - by_\xi x_\xi + cx_\xi^2 = 0 \quad (9.27)$$

が得られる。ここで、

$$a = A_1 C_2 - A_2 C_1, \quad b = A_1 D_2 - A_2 D_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1, \quad c = B_1 D_2 - B_2 D_1 \quad (9.28)$$

η 線 ($\xi = const$) も同じ式を満足するので、

$$ay_\eta^2 - by_\eta x_\eta + cx_\eta^2 = 0 \quad (9.29)$$

となる。

これらをひとつの式で使って表す、つまり、パラメータ σ を使って表すと

$$a \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - b \frac{dy}{d\sigma} \frac{dx}{d\sigma} + c \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 = 0 \quad (9.30)$$

となる。ここで、 σ は ξ か η のどちらかを表す。これが (x, y) 平面上での特性曲線の軌跡を表す式となる ($\eta = const$ あるいは $\xi = const$ の曲線)。

9.2.2 特性曲線の傾斜

特性曲線 $x = x(\sigma), y = y(\sigma)$ の傾き λ は

$$\lambda = \frac{\frac{dy}{d\sigma}}{\frac{dx}{d\sigma}} \quad (9.31)$$

と表すことができる。これを特性方向とも呼ぶ。これを式 (9.30) に代入すると

$$a\lambda^2 - b\lambda + c = 0 \quad (9.32)$$

となる。この方程式が実根を持つかどうかで流れが超音速か否かが分かる。つまり、判別式 (discriminant) から

- $b^2 - 4ac > 0$ であれば、2つの実根を持つ。→ 方程式は双曲型となり、この流れは超音速流になる。
- $b^2 - 4ac = 0$ であれば、重根を持つ。→ 方程式は放物型となる。
- $b^2 - 4ac < 0$ であれば、虚根を持つ。→ 方程式は楕円型となり、これは亜音速流となる。

特性曲線法は双曲型の偏微分方程式の解法として利用される。式 (9.32) より、

$$\lambda_+ = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \lambda_- = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (9.33)$$

となる。これらの λ_+, λ_- を使えば、特性曲線は

$$\frac{dy}{d\sigma} - \lambda_+ \frac{dx}{d\xi} = 0 \quad \frac{dy}{d\sigma} - \lambda_- \frac{dx}{d\eta} = 0 \quad (9.34)$$

と表すことができる。これらは、特性曲線の2つの分枝 ξ 線、 η 線で、それぞれの曲線を C^+, C^- と呼ぶ。

9.3 特性曲線上での方程式

ここまでは、 (x, y) 平面上での特性曲線が決定されたが、次に、特性曲線上で流れの方程式がどのように表されるかを調べる。

流れの速度成分である u も v も、特性曲線座標 σ で表されると仮定する。 $u(x, y), v(x, y)$ であり、 $x = x(\sigma), y = y(\sigma)$ であるので、

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma} \quad (9.35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma} \quad (9.36)$$

となる。式 (9.1) に Λ_1 を掛け、式 (9.2) に Λ_2 を掛け、それぞれを加える。

$$\begin{aligned} & \Lambda_1 \left(A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} + C_1 \frac{\partial v}{\partial x} + D_1 \frac{\partial v}{\partial y} + E_1 \right) \\ & + \Lambda_2 \left(A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + C_2 \frac{\partial v}{\partial x} + D_2 \frac{\partial v}{\partial y} + E_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (9.37)$$

となる。これを整理すると

$$\begin{aligned} & (\Lambda_1 A_1 + \Lambda_2 A_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (\Lambda_1 B_1 + \Lambda_2 B_2) \frac{\partial u}{\partial y} \\ & + (\Lambda_1 C_1 + \Lambda_2 C_2) \frac{\partial v}{\partial x} + (\Lambda_1 D_1 + \Lambda_2 D_2) \frac{\partial v}{\partial y} + \Lambda_1 E_1 + \Lambda_2 E_2 = 0 \end{aligned} \quad (9.38)$$

$\partial u / \partial x$ と $\partial u / \partial y$ の係数が式 (9.35) の右辺の係数と一致すれば、 u は σ の微分で表されることになる。つまり、

$$\frac{\Lambda_1 A_1 + \Lambda_2 A_2}{\Lambda_1 B_1 + \Lambda_2 B_2} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \sigma}}{\frac{\partial y}{\partial \sigma}} = \frac{x_\sigma}{y_\sigma} \quad \frac{\Lambda_1 C_1 + \Lambda_2 C_2}{\Lambda_1 D_1 + \Lambda_2 D_2} = \frac{x_\sigma}{y_\sigma} \quad (9.39)$$

であればよい。

一方、 (x, y) 面上の特性曲線の関係式 (9.26) より

$$\frac{A_1 y_\sigma - B_1 x_\sigma}{A_2 y_\sigma - B_2 x_\sigma} = \frac{C_1 y_\sigma - D_1 x_\sigma}{C_2 y_\sigma - D_2 x_\sigma} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (9.40)$$

となる。最後の項は、この比をこのようにおいている。

これを書き直すと

$$(A_1y_\sigma - B_1x_\sigma)R_1 + (A_2y_\sigma - B_2x_\sigma)R_2 = 0 \quad (9.41)$$

$$(C_1y_\sigma - D_1x_\sigma)R_1 + (C_2y_\sigma - D_2x_\sigma)R_2 = 0 \quad (9.42)$$

x_σ, y_σ でまとめると

$$(A_1R_1 + A_2R_2)y_\sigma - (B_1R_1 + B_2R_2)x_\sigma = 0 \quad (9.43)$$

$$(C_1R_1 + C_2R_2)y_\sigma - (D_1R_1 + D_2R_2)x_\sigma = 0 \quad (9.44)$$

従って

$$\frac{A_1R_1 + A_2R_2}{B_1R_1 + B_2R_2} = \frac{C_1R_1 + C_2R_2}{D_1R_1 + D_2R_2} = \frac{x_\sigma}{y_\sigma} \quad (9.45)$$

となる。

式 (9.38) で、 u, v が σ だけの微分で置き換えられるためには式 (9.39) と式 (9.45) が等しくなるようにすればよい。そのためには

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (9.46)$$

となるように、 Λ_1, Λ_2 をとればよい。

その結果、式 (9.38) は

$$\begin{aligned} & (\Lambda_1A_1 + \Lambda_2A_2) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Lambda_1B_1 + \Lambda_2B_2}{\Lambda_1A_1 + \Lambda_2A_2} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + (\Lambda_1C_1 + \Lambda_2C_2) \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\Lambda_1D_1 + \Lambda_2D_2}{\Lambda_1C_1 + \Lambda_2C_2} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \\ & + \Lambda_1E_1 + \Lambda_2E_2 = 0 \end{aligned} \quad (9.47)$$

となる。この式に、式 (9.45) を代入すると、

$$(\Lambda_1A_1 + \Lambda_2A_2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y_\sigma}{x_\sigma} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\Lambda_1C_1 + \Lambda_2C_2) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{y_\sigma}{x_\sigma} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (\Lambda_1E_1 + \Lambda_2E_2) = 0 \quad (9.48)$$

ここで、 x_σ を掛けて、式 (9.39) を適用すると

$$(\Lambda_1A_1 + \Lambda_2A_2)u_\sigma + (\Lambda_1C_1 + \Lambda_2C_2)v_\sigma + (\Lambda_1E_1 + \Lambda_2E_2)x_\sigma = 0 \quad (9.49)$$

となる。

同様に、式 (9.38) を $(\Lambda_1B_1 + \Lambda_2B_2)\{\dots\} + \dots$ の形に整理すると

$$\begin{aligned} & (\Lambda_1B_1 + \Lambda_2B_2) \left(\frac{\Lambda_1A_1 + \Lambda_2A_2}{\Lambda_1B_1 + \Lambda_2B_2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\Lambda_1D_1 + \Lambda_2D_2) \left(\frac{\Lambda_1C_1 + \Lambda_2C_2}{\Lambda_1D_1 + \Lambda_2D_2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & + \Lambda_1E_1 + \Lambda_2E_2 = 0 \end{aligned} \quad (9.50)$$

となり、式 (9.39) を使って整理すると

$$(\Lambda_1B_1 + \Lambda_2B_2)u_\sigma + (\Lambda_1D_1 + \Lambda_2D_2)v_\sigma + (\Lambda_1E_1 + \Lambda_2E_2)y_\sigma = 0 \quad (9.51)$$

となる。

式 (9.49) と式 (9.51) から、係数 Λ_1, Λ_2 について整理すると

$$(A_1u_\sigma + C_1v_\sigma + E_1x_\sigma)\Lambda_1 + (A_2u_\sigma + C_2v_\sigma + E_2x_\sigma)\Lambda_2 = 0 \quad (9.52)$$

$$(B_1u_\sigma + D_1v_\sigma + E_1y_\sigma)\Lambda_1 + (B_2u_\sigma + D_2v_\sigma + E_2y_\sigma)\Lambda_2 = 0 \quad (9.53)$$

となる。式 (9.41) と式 (9.52) より、 Λ_1, Λ_2 を消去する。ここで、式 (9.41) は、式 (9.46) より、 R_1, R_2 の代わりに、 Λ_1, Λ_2 で表せる。

$$(A_1 y_\sigma - B_1 x_\sigma) \Lambda_1 + (A_2 y_\sigma - B_2 x_\sigma) \Lambda_2 = 0 \quad (9.54)$$

以上より

$$\begin{vmatrix} A_1 y_\sigma - B_1 x_\sigma, & A_2 y_\sigma - B_2 x_\sigma \\ A_1 u_\sigma + C_1 v_\sigma + E_1 x_\sigma, & A_2 u_\sigma + C_2 v_\sigma + E_2 x_\sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (9.55)$$

この式を展開すると

$$(A_1 y_\sigma - B_1 x_\sigma)(A_2 u_\sigma + C_2 v_\sigma + E_2 x_\sigma) - (A_2 y_\sigma - B_2 x_\sigma)(A_1 u_\sigma + C_1 v_\sigma + E_1 x_\sigma) = 0 \quad (9.56)$$

この式で、 $u_\sigma, v_\sigma, x_\sigma$ を外に出すと

$$\begin{aligned} & \{A_2(A_1 y_\sigma - B_1 x_\sigma) - A_1(A_2 y_\sigma - B_2 x_\sigma)\} u_\sigma \\ & + \{C_2(A_1 y_\sigma - B_1 x_\sigma) - C_1(A_2 y_\sigma - B_2 x_\sigma)\} v_\sigma \\ & + \{E_2(A_1 y_\sigma - B_1 x_\sigma) - E_1(A_2 y_\sigma - B_2 x_\sigma)\} x_\sigma = 0 \end{aligned} \quad (9.57)$$

となる。この式を整理すると

$$\begin{aligned} & x_\sigma(A_1 B_2 - A_2 B_1) u_\sigma \\ & + \{(A_1 C_2 - A_2 C_1) y_\sigma - (C_2 B_1 - C_1 B_2) x_\sigma\} v_\sigma \\ & + \{(A_1 E_2 - A_2 E_1) y_\sigma - (B_1 E_2 - B_2 E_1) x_\sigma\} x_\sigma = 0 \end{aligned} \quad (9.58)$$

となる。これを x_σ で割ると

$$\begin{aligned} & (A_1 B_2 - A_2 B_1) u_\sigma \\ & + \{(A_1 C_2 - A_2 C_1) \lambda - (C_2 B_1 - C_1 B_2)\} v_\sigma \\ & + \{(A_1 E_2 - E_1 A_2) \lambda - (B_1 E_2 - B_2 E_1)\} x_\sigma = 0 \end{aligned} \quad (9.59)$$

この式を適合方程式 (compatibility equation) という。

ここで、簡単のために係数を以下のように置く。

$$\begin{aligned} T &= A_1 B_2 - A_2 B_1, \quad a = A_1 C_2 - A_2 C_1 \quad S = C_2 B_1 - C_1 B_2 \\ L &= A_1 E_2 - A_2 E_1 \quad M = B_1 E_2 - B_2 E_1 \end{aligned} \quad (9.60)$$

これらのことから、これらをまとめると、特性曲線およびその曲線上で速度が満たす関係式は、特性曲線 ξ 線上では (C^+ の上では)

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} - \lambda_+ \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \quad (9.61)$$

これに対応する (u, v) 平面 (位相平面) 上での速度の満たす式は、

$$T \frac{\partial u}{\partial \xi} + (a \lambda_+ - S) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (L \lambda_+ - M) \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \quad (9.62)$$

となる。これが位相平面である (u, v) 平面上で描く軌跡 (曲線) を Γ^+ と呼ぶ。

一方、 η 線は、以下の式

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} - \lambda_- \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \quad (9.63)$$

で求められ、これが (x, y) 平面上に描く軌跡を C^- と呼ぶ。

この C^- 線上で速度が満たす方程式は

$$T \frac{\partial u}{\partial \eta} + (a\lambda_- - S) \frac{\partial v}{\partial \eta} + (L\lambda_- - M) \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \quad (9.64)$$

となる。この (u, v) 平面上での軌跡は Γ^- と呼ばれる。

ただし、特性曲線の傾きである λ_+, λ_- は、式 (9.33) から

$$\lambda_+ = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \lambda_- = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (9.65)$$

である。

このように、速度 (u, v) に対して解くべき方程式が特性曲線上では簡単化され、それぞれ常微分方程式になる。

9.4 2次元超音速流に対する特性曲線

2次元超音速流に対する基礎方程式は、1) ポテンシャルの方程式 (6.12) と 2) 渦なし (渦度=0) の方程式で、それぞれ次のようになる。

$$(a^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - uv \frac{\partial u}{\partial y} - uv \frac{\partial v}{\partial x} + (a^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9.66)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (9.67)$$

これらの式は、前述の、双曲型の方程式 (9.1) と (9.2) に対応する。これらの係数を比較すると、

$$A_1 = a^2 - u^2, \quad B_1 = -uv, \quad C_1 = -uv, \quad D_1 = a^2 - v^2, \quad E_1 = 0 \quad (9.68)$$

$$A_2 = 0, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = -1, \quad D_2 = 0, \quad E_2 = 0 \quad (9.69)$$

となる。また、式 (9.14) と式 (9.60) における各係数は、具体的に

$$a = -(a^2 - u^2), \quad T = a^2 - u^2, \quad S = 2uv, \quad L = M = 0 \quad (9.70)$$

$$b = 2uv, \quad c = -(a^2 - v^2) \quad (9.71)$$

となる。ここで、右辺にある a は音速である (音速に対して a と書いたり、 c と書いたりするので混乱しないように)。

9.4.1 特性曲線の傾き

この流れに対する特性曲線の傾きである λ^\pm は、式 (9.65) より以下のようになる。

$$\lambda^\pm = \frac{uv \mp a\sqrt{V^2 - a^2}}{-(a^2 - u^2)} \quad (9.72)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{V^2 uv \mp aV^2 \sqrt{V^2 - a^2}}{-V^2(a^2 - u^2)} \\ &= \frac{(v\sqrt{V^2 - a^2} \mp ua)(u\sqrt{V^2 - a^2} \mp va)}{(u\sqrt{V^2 - a^2} \pm va)(u\sqrt{V^2 - a^2} \mp va)} \end{aligned} \quad (9.73)$$

ここで、添え字 \pm は復号同順である。

ここで、この式の分子を変形する。

$$\begin{aligned}
 & (v\sqrt{V^2 - a^2} \mp ua)(u\sqrt{V^2 - a^2} \mp va) \\
 &= uv(V^2 - a^2) \mp v^2a\sqrt{V^2 - a^2} \mp u^2a\sqrt{V^2 - a^2} + uva^2 \\
 &= \mp(u^2 + v^2)a\sqrt{V^2 - a^2} + uvV^2 \\
 &= \mp V^2a\sqrt{V^2 - a^2} + uvV^2
 \end{aligned} \tag{9.74}$$

一方、分母は

$$\begin{aligned}
 & (u\sqrt{V^2 - a^2} \pm va)(u\sqrt{V^2 - a^2} \mp va) \\
 &= u^2(V^2 - a^2) - v^2a^2 \\
 &= u^2(u^2 + v^2) - u^2a^2 - v^2a^2 \\
 &= (u^2 + v^2)(u^2 - a^2) \\
 &= V^2(u^2 - a^2)
 \end{aligned} \tag{9.75}$$

となる。これらの分母、分子を使うと

$$\lambda^\pm = \frac{v\sqrt{V^2 - a^2} \mp ua}{u\sqrt{V^2 - a^2} \pm va} \tag{9.76}$$

となる。この式を変形していくと、

$$\lambda^\pm = \frac{\frac{v}{u} \mp \frac{a}{\sqrt{V^2 - a^2}}}{1 \pm \frac{v}{u} \frac{a}{\sqrt{V^2 - a^2}}} \tag{9.77}$$

$$= \frac{\frac{v}{u} \mp \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}}{1 \pm \frac{v}{u} \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}} \tag{9.78}$$

$$= \frac{\tan \theta \mp \tan \mu}{1 \pm \tan \theta \cdot \tan \mu} \tag{9.79}$$

$$= \tan(\theta \mp \mu) \tag{9.80}$$

となる。ここで、流れの角度 θ およびマッハ角 μ は

$$\frac{v}{u} = \tan \theta, \quad \tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \tag{9.81}$$

である。

以上まとめると、

$$\lambda_+ = \tan(\theta - \mu), \quad \lambda_- = \tan(\theta + \mu) \tag{9.82}$$

となる。

流れの方向 \vec{V} は x 軸に対して θ の方向を向いていて、

$$u = V \cos \theta, \quad v = V \sin \theta \tag{9.83}$$

であるので、 (x, y) 平面での特性曲線 ξ, η の方向は、流れの方向 \vec{V} に対して、マッハ角 μ だけ、 $-\mu$ の方向 (ξ 線)、および $+\mu$ の方向 (η 線) に引いたものになる。大変簡単な関係となっている。

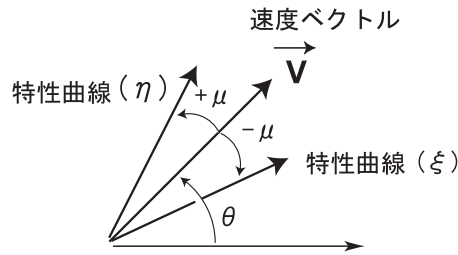


図 9.5: 速度ベクトルと2種類の特性曲線 (ξ線とη線)

9.4.2 特性曲線上で流れの速度を求める常微分方程式

(u, v) 平面での方程式は、Γ⁺ 線上で、別の言い方をすれば、(x, y) 平面上での ξ 線の上で、

$$T \frac{\partial u}{\partial \xi} + (a\lambda_+ - S) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (L\lambda_+ - M) \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \tag{9.84}$$

が成り立つ。ここで、式 (9.70) より

$$L = M = 0 \tag{9.85}$$

となるので、

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{a\lambda_+ - S}{T} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \tag{9.86}$$

となる。ここで、式 (9.70) と式 (9.72) を使うと

$$\frac{a\lambda_+ - S}{T} = \frac{-(a^2 - u^2)\lambda_+ - 2uv}{a^2 - u^2} = \frac{uv + a\sqrt{V^2 - a^2}}{-(a^2 - u^2)} = \lambda_- \tag{9.87}$$

となる。従って、(u, v) 平面にある特性曲線である Γ⁺ 線上では、式 (9.86) より

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_- \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \tag{9.88}$$

となる。大変簡単な関係式である。

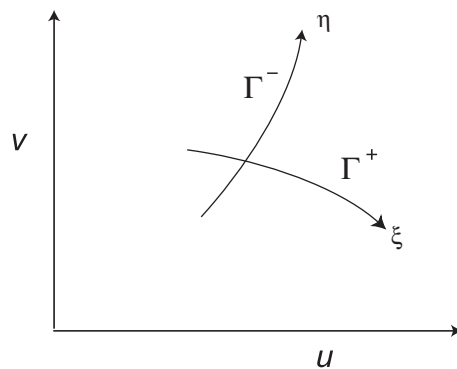


図 9.6: 速度平面上での特性曲線

同様に、(u, v) 平面での方程式は、Γ⁻ 線上で、別に言い方をすれば、(x, y) 平面での η 線上で、式 (9.64) を変形して、

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda_+ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \tag{9.89}$$

となる。

以上、 (x, y) 平面と (ξ, η) 平面での特性曲線をまとめると以下ようになる。

• ξ 線では

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} - \lambda_+ \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{on } C^+) \quad (9.90)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_- \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{on } \Gamma^+) \quad (9.91)$$

• η 線では

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} - \lambda_- \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{on } C^-) \quad (9.92)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda_+ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{on } \Gamma^-) \quad (9.93)$$

次に、速度に関する式を変形する。式 (9.83) を使うと、

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial V \cos \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \xi} \cos \theta + V(-\sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (9.94)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial V \sin \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \xi} \sin \theta + V \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (9.95)$$

となる。

式 (9.88) は、これらの式と、式 (9.82) を利用すると

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_- \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad (9.96)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \cos \theta - V \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \tan(\theta + \mu) \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \sin \theta + V \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial \xi} (\cos \theta + \tan(\theta + \mu) \cdot \sin \theta) + V \frac{\partial \theta}{\partial \xi} (-\sin \theta + \tan(\theta + \mu) \cdot \cos \theta) = 0 \end{aligned} \quad (9.97)$$

となる。この式の一部を変形すると、

$$\cos \theta + \tan(\theta + \mu) \cdot \sin \theta = \frac{\cos \mu}{\cos(\theta + \mu)} \quad (9.98)$$

$$-\sin \theta + \tan(\theta + \mu) \cdot \cos \theta = \frac{\sin \mu}{\cos(\theta + \mu)} \quad (9.99)$$

となる。これを式 (9.97) に代入すると

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} \cos \mu + V \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \sin \mu = 0 \quad (\text{on } \Gamma^+) \quad (9.100)$$

同様に、 Γ^- の上では

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} \cos \mu - V \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \sin \mu = 0 \quad (\text{on } \Gamma^-) \quad (9.101)$$

となる。

これらの式を $\sin \mu$ で割ると、 $\sigma = \xi$ あるいは η に対して

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} \frac{1}{\tan \mu} \pm V \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\partial V}{\partial \sigma} \sqrt{M^2 - 1} \pm V \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 0 \quad (9.102)$$

となる。ここで、複合同順 (double sign in the same order) の $+$ は Γ^+ の上で、 $-$ は Γ^- の上で成り立つ。

従って、特性曲線 Γ_+ , Γ_- の上では

$$d\theta = \mp \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} = \mp \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (9.103)$$

つまり、速度ベクトル \vec{V} の方向 θ とマッハ数 M とは一対一の関係にある。流れの角度が変われば、マッハ数も変化することになる。この関係は良く使用する。

(式の誘導)

ここで、式 (9.103) の最後の関係式を誘導してみる。まず、 $M = V/a$ より、

$$dM = \frac{dV}{a} - V \frac{da}{a^2} \quad (9.104)$$

全エンタルピー H_0 が一定の式は、式 (2.18) より

$$H_0 = \frac{1}{2} V^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \text{const} \quad (9.105)$$

となる。この式の微分を取ると

$$V dV + \frac{2ada}{\gamma - 1} = 0 \rightarrow da = -\frac{(\gamma - 1)V dV}{2a} \quad (9.106)$$

となる。この式を式 (9.104) に代入すると

$$dM = \frac{dV}{a} + \frac{V}{a^2} \cdot \frac{(\gamma - 1)V dV}{2a} \rightarrow \frac{dM}{M} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \frac{dV}{V} \quad (9.107)$$

となる。これで、式 (9.103) の証明終了。

(了)

流れの局所マッハ数 M とマッハ数 1 での音速 (臨界速度 $V_* = a_*$) に基づくマッハ数 M_* の関係は、以下のように表される。

$$M = \frac{M_*}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} M_*^2}} \quad (9.108)$$

(証明)

式 (9.108) の証明は以下の様である。エネルギー式 (2.18) より

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2 \quad (9.109)$$

となる。ここで、 a_* は臨界速度である。この式を a^2 で割ると、

$$\frac{M^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \frac{a_*^2}{a^2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \frac{a_*^2}{V^2} \times \frac{V^2}{a^2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \frac{M^2}{M_*^2} \quad (9.110)$$

となる。この式より式 (9.108) が得られる。ちなみに、 M と M_* の関係については、第 7 章の第 7.5 節を参照されたい。

(了)

この M_* を使うと、特性曲線 Γ^+ , Γ^- に対して、流れ方向の角度の変化 $d\theta$ は、

$$d\theta = \mp \sqrt{\frac{M_*^2 - 1}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_*^2}} \frac{dM_*}{M_*} \quad (9.111)$$

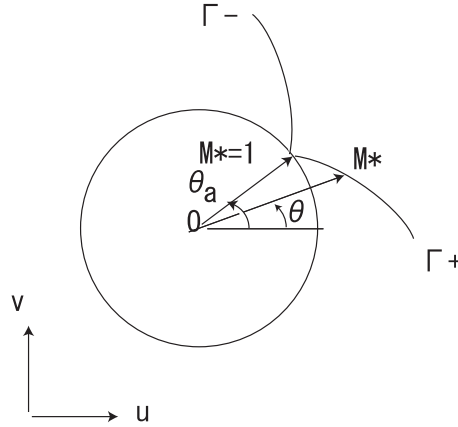


図 9.7: 流れのマッハ数と角度変化の関係

となる。この式の証明は、式 (9.103) より

$$d\theta = \mp \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} = \mp \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV/a^*}{V/a^*} = \mp \sqrt{M^2 - 1} \frac{dM^*}{M^*} \quad (9.112)$$

となり、この式に、式 (9.108) を代入すればよい。

式 (9.111) を積分すると

$$\theta - \theta_a = \mp \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{M_*^2 - 1}{\frac{2}{\gamma-1} - (M_*^2 - 1)}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{M_*^2 - 1}{\frac{2}{\gamma-1} - (M_*^2 - 1)}} \right] \quad (9.113)$$

となる。この式は簡潔な式であり、かつ大変有用な式である。

ここで、右辺を $\omega(M_*)$ と置く。つまり、

$$\omega(M_*) = \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{M_*^2 - 1}{\frac{2}{\gamma-1} - (M_*^2 - 1)}} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{M_*^2 - 1}{\frac{2}{\gamma-1} - (M_*^2 - 1)}} \right] \quad (9.114)$$

その結果、

$$\theta - \theta_a = \mp \omega(M_*) \quad (9.115)$$

と表すことができる。ここで、 $\omega(M_*)$ は、 M_* が与えられると計算できるもので、角度として出てくる。

この式の $-$ 符号は Γ^+ 分枝、 $+$ 符号は Γ^- 分枝である。また、 θ_a は、 $M^* = V/a^* = 1$ のときの偏角である。つまり、 θ_a の値を変えて、そこから、この式の基づいて、 (u, v) 平面上に2つの線を描けばそれらが特性曲線になる。基本的には、流れの速度は、これらの線に沿って変化していくので、大変考えやすい。

(u, v) 平面 (これをホドグラフ面とも呼ぶ; 横軸が u で、縦軸が v) にこれらの線を描く場合、まず、 $M^* = 1$ 、つまり半径が $r = a^*$ の円を描く。この円より外側では超音速で、内側では亜音速である。次に、この円の上に、半径が

$$r = \frac{\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - 1}{2} a^* \quad (9.116)$$

の円を転がして、その円上にある点が描く軌跡をプロットする。この円は最初は、 $\theta = \theta_*$ で $r = a^*$ の円と接している。この接点に印を付け、その後、この印が動く軌跡を描けばよい。この軌跡の曲線は、エピサイクロイド曲線と呼ばれる。

ちなみに、到達できる最大速度 V_{max} は、式 (2.21) から、

$$V_{max} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} a_* \quad (9.117)$$

である。これを、 M ではなく、 M^* で表示すると、最大速度は有限となる。

$$M_{max}^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (9.118)$$

もし M で表すと最大速度は $M = \infty$ になる。これは式 (9.108) より明らかである。

以上をまとめると

- ξ 分枝に沿って、

$$\theta + \omega = \theta_a = \text{const} \quad (9.119)$$

- η 分枝に沿って、

$$\theta - \omega = \theta_a = \text{const} \quad (9.120)$$

という関係が存在する。

ちなみに、 ω を M_* の代わりに、 M で表すと

$$\omega(M) = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \quad (9.121)$$

となる。これは、式 (9.110) を使って求められる。

以上述べてきた式を使って、流れの速度の大きさやその方向、また物理面 (x, y) での特性曲線の方向が決定される。

ホドグラフ面 (u, v) 上で、ある点 P の流れを決定したい。点 P には、点 1 を通る特性曲線 Γ_+ が通過し、また、別の点である点 2 を通る特性曲線 Γ_- も通過するとする。点 1 および点 2 ではそれぞれ流れの角度 θ とマッハ数 M_* が既知であるとする。その結果、

$$\theta + \omega(M_*) = \theta_1 + \omega(M_{*1}) \quad (\text{on } \Gamma_+) \quad (9.122)$$

$$\theta - \omega(M_*) = \theta_2 + \omega(M_{*2}) \quad (\text{on } \Gamma_-) \quad (9.123)$$

の 2 つの式が得られる。この式を解く事により (実際には既に作製されている図から求める事が出来る) それら 2 つの曲線の交点として、点 P での (θ, M_*) が決定される。

M_* が求めれば、式 (9.108) より M が求められる。これを使うと以下の式よりマッハ角 μ が求められる。

$$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (9.124)$$

μ が求めれば、物理面 (x, y) での特性曲線の方向が決定される、 (x, y) 平面に描く事が出来る。

$$\lambda_+ = \tan(\theta - \mu), \quad \lambda_- = \tan(\theta + \mu) \quad (9.125)$$

9.4.3 特性曲線の直交性

ここで、 (x, y) 平面の特性曲線と (u, v) 平面の特性曲線についてある関係が存在し、それを使うと (x, y) 平面上で特性曲線を描くとき便利である。式 (9.90) と式 (9.93) より λ_+ を消去すると

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \eta} = 0 \quad (9.126)$$

この式を解釈すると、 (x, y) 平面上の ξ 分枝と (u, v) 平面上の η 分枝は垂直に交わる。つまり、 C_+ 曲線と Γ_- 曲線は直交する。

同様に、式 (9.91) と式 (9.92) より λ_- を消去すると

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \xi} = 0 \quad (9.127)$$

となる。この式から、 (x, y) 平面上の η 分枝と (u, v) 平面上の ξ 分枝は垂直に交わることが分かる。つまり、 C_- 曲線と Γ_+ 曲線は直交する。

実際には、これらの垂直となる特徴を利用して、特性曲線を図として描き、解を求めていく。

9.5 単純波

流れが、 ξ 方向、あるいは η 方向のみに変化する流れを単純波 (simple wave) の流れとよぶ。つまり、その流れ場には、 ξ 線の分布だけで埋まるか、 η 線の分布だけで埋まるかの、どちらかである。

9.5.1 膨張流

例えば、先端が半楔形状で (つまり、底面は平板) その先端角が $\theta_0 = 10^\circ$ の物体を考える。その物体は、物体表面の傾斜角が、その後、下流方向に 10° から徐々に減少するとする。また、先端部での速度を V_0 とする。 V_0 は当然超音速である。このとき、流れは物体表面に沿って流れ、物体表面から特性曲線の η 線が斜め上方に向かって直線として発生する。 ξ 線は発生しない。流れは、 ξ 方向に変化する。つまり、流れは、 η 線を横切る方向に変化する。具体的に言えば、流れの速度と角度は、 Γ^+ 線に沿って変化する。

特性曲線図より、初期値として、 θ, V_0 の位置を与え、その後を、その点を通る Γ^+ に沿って、物体表面の角度 θ を与えれば、速度 V が図から求められる。この速度 V は物体表面の傾斜角が減少していくにつれて、増加していく (Γ 線の形状を見れば明らか)。つまり、流れは加速していく。従って、この流れは膨張流である。ちなみに、この物体表面上の速度 V は物体表面から発生する η 線に沿って同じ値を取る。つまり、物体表面での速度が η 線に沿って伝播する。このようにして、物体表面のみならず、流れ場全体の速度が決定されることになる。

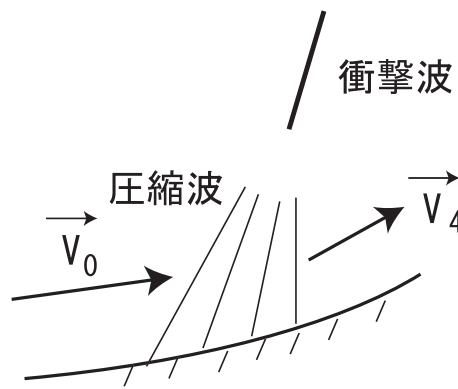


図 9.8: 凹面物体を過ぎる超音速流れ (圧縮波を横切って流れが減速)

9.5.2 圧縮流

上述の膨張流の場合と同様に、先端が半楔形状で（つまり、底面は平板）、その先端角が $\theta_0 = 10^\circ$ の物体を考える。しかし、今度は、物体表面の傾斜角が、その後、下流方向に 10° から徐々に増加するとする。先端部での速度を V_0 とする。流れは物体表面に沿って流れ、このときも、物体表面から特性曲線の η 線が斜め上方に向かって直線として発生する。 ξ 線は発生しない。流れは、 ξ 方向に、つまり、 η 線を横切る方向に変化する。また、流れの速度と角度は、 Γ^+ 線に沿って変化する。ここまでは、上述の膨張流の場合とほぼ同じである。

特性曲線図より、初期値として、 θ, V_0 の位置を与え、その後を、その点を通る Γ^+ に沿って、物体表面の角度 θ を与えれば、速度 V が図から求められる。この速度 V は物体表面の傾斜角が増加していくにつれて、減少していく。上述と同じ Γ 線の上をたどるが、今度は、逆の方向に進むことになる。つまり、流れは減速し、圧縮流となる。この場合も、この物体表面上の速度 V は物体表面から発生する η 線に沿って同じ値を取り、物体表面での速度が η 線に沿って伝播する。このようにして、流れ場全体の速度が決定される。ちなみに、この圧縮性流の場合は、物体表面のそれぞれから発生した圧縮波（ η 線）は、下流に行くにつれてその傾きを増加させ、物体表面から離れたある場所で結合して、衝撃波となる。

上述した膨張流と圧縮性流に関する物体は、下面が平面で、上面の傾斜が変化する場合である。それに対して、上面が平面で、下面が変化する場合が考えられる。つまり、上下を反対にした場合である。このときは、下面側の流れを解析することになるが、流れ場中には、今度は、 ξ 線が発生することになる。 η 線は全く発生しない。その結果、流れの角度や速度は、ホドグラフ面での特性曲線 Γ^- に沿って変化することになる。

9.5.3 プラントル・マイヤー膨張

上述したものは、物体表面の傾斜角が徐々に変化する場合であった。ここでは、角がある場合、つまり物体表面が一点で折れ曲がる場合を考える。超音速流において、角（物体側の角度が 180° 以下）を曲がる流れをプラントル・マイヤー流れ (Prandtl-Meyer's expansion) と呼ぶ。

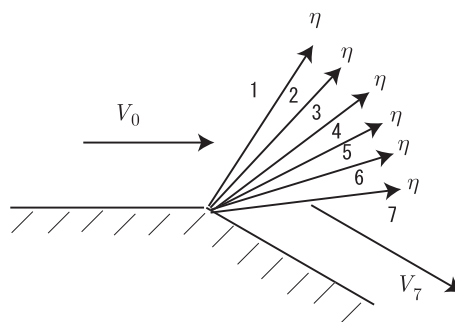


図 9.9: 角を回る流れ（物理面）

この流れの特徴は

- マッハ波が角の一点から無数に扇形をなして放射状に生成される。それぞれのマッハ波を流れが通過すると流れの角度及び速度の絶対値が微小に変化し、これらの多くのマッハ波を通過する事により、最終的に流れの有限な変化量が得られる。

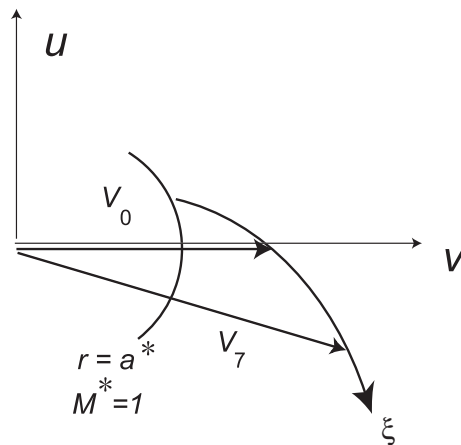


図 9.10: 角を回る流れ (ホドグラフ面)

- 亜音速流と違って、角があっても流れは連続的に曲がって進む。その意味で、航空機の空気取り入れ口は、超音速では流れが剥離しないでエンジンの中に入っていく可能性がある。
- 音速状態の流れが真空状態にまで膨張するとき、流れの偏向角が最大となる。この角度は空気の場合、 130.45° である。これは、式 (9.121) で $M \rightarrow \infty$ とおくと、

$$\omega = \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2} \quad (9.128)$$

となる。空気の場合、 $\gamma = 1.4$ であるので、 $\omega = 130^\circ$ となる。

9.6 2次元ノズル流れ

2次元ノズル内の流れを特性曲線法で解く場合の方法を第9.11図に示す。2次元ノズルとしてラバルノズル (Laval nozzle) を考える。

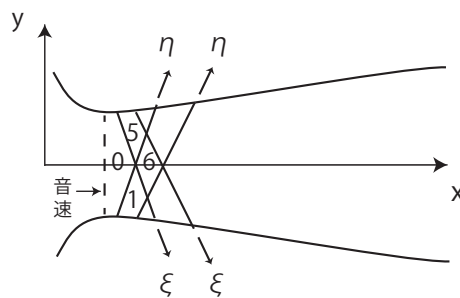


図 9.11: Laval nozzle 内の流れを特性曲線法で解く (物理面)

このようなことを繰り返して、下流で波の出ない状態に壁面の勾配 (slope) を調節すれば、一樣な流れが得られる。ちなみに、上図では、 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ は、単純波 (simple wave) として計算できる。つまり、ひとつの特性曲線だけを使って計算できる。

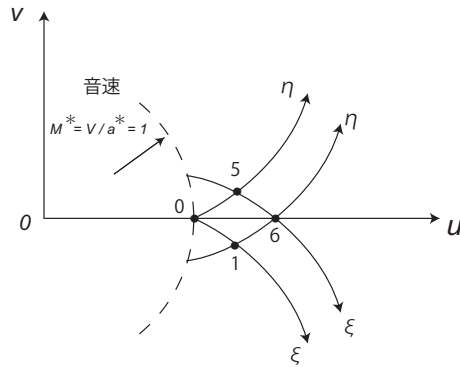


図 9.12: Laval nozzle 内の流れに対するホドグラフ面上の特性曲線

壁での反射 壁での特性曲線の反射をなくす方法を示す。 (u, v) 面上の特性曲線で、点 10 と点 15 より、点 16 での (u, v) が決まる。点 16 での速度の方向に壁の A の部分の方向を一致させると、特性曲線の反射は起こらない。つまり、そこから η 線は発生させて、その後の流れの方向を調整しようとはしなくなる。このように壁での反射をなくしていくと、きれいな一様流が生成される。

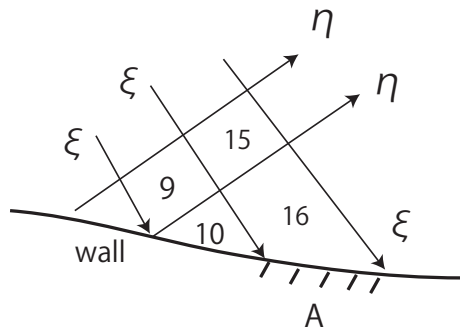


図 9.13: 壁での特性曲線の反射

(問題) ラバルノズルの形状を与えて、中の流れを特性曲線法で求めよ。

9.7 超音速空気力学

翼の厚さが薄い、あるいは、迎角が小さい場合には、微小擾乱の速度ポテンシャル (線形速度ポテンシャル) の方程式 (6.23) が適用できる。

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1} \tag{9.129}$$

この式に対する一般解は

$$\phi = f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y) \tag{9.130}$$

となる。

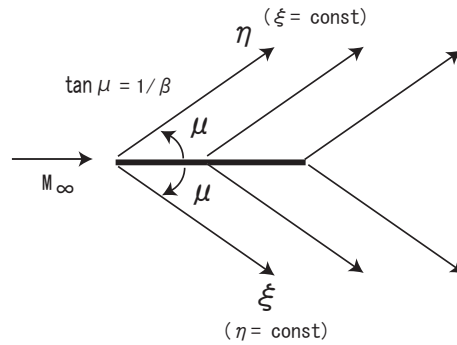


図 9.14: 超音速流 M_∞ から発生する 2 種類の特性曲線 (ξ 線と η 線)

この場合においては、線形化されているので、物体表面から発生する特性曲線は、物体表面の場所によらず同じ傾きを持つ。

$$\xi = x - \beta y \quad \eta = x + \beta y \quad (9.131)$$

つまり、主流に対して、右方向に出るのが ξ 線で、左方向に出るのが η 線である。

具体的には、

- 翼上面側： η 線： $\xi = x - \beta y = \text{一定}$
- 翼下面側： ξ 線： $\eta = x + \beta y = \text{一定}$

となる。それぞれが単純波である。あるいは、マッハ波と呼ばれる。

ちなみに、衝撃波を横切った後の流れのエントロピー増加は、流れの偏向角 δ の 3 乗程度であるので、翼型の厚みが薄ければ、流れの偏向角も小さいと見なすことができ、等エントロピー流と考えても差し支えない。

9.7.1 境界条件

流れが翼に沿って流れるのが境界条件となる。線形近似では、それは以下ようになる。

$$\frac{v}{V_\infty} = \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{dy}{dx} \quad (9.132)$$

- 翼上面では

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=+0} = V_\infty \frac{dy_u}{dx} \quad (9.133)$$

- 翼下面では

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=-0} = V_\infty \frac{dy_l}{dx} \quad (9.134)$$

となる。

圧力係数 C_p は、式 (5.17) より

$$C_p = -\frac{2u}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (9.135)$$

となる。

方程式 (9.129) の一般解は

$$\phi = f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \quad (9.136)$$

と書ける。ここで、式 (9.131) より

$$\xi = x - \beta y, \quad \eta = x + \beta y \quad (9.137)$$

である。

つまり、翼周りの (x, y) 平面に描かれる特性曲線は、

- 翼上面では、 x 軸とマッハ角 μ で斜め上方に広がる直線群 ($\xi = x - \beta y = \text{一定}$)
- 翼下面では、 x 軸とマッハ角 $-\mu$ で斜め下方に広がる直線群 ($\eta = x + \beta y = \text{一定}$)

となる。ここで、マッハ角は、一様流のマッハ角で、 $\tan \mu = 1/\sqrt{M_\infty^2 - 1}$ である。

ここで、流れ場中の一点 P を考え、そこでのポテンシャルを ϕ_P とおくと

$$\phi_P = f_1(\xi_P) + f_2(\eta_P) = f_1(\xi_Q) + f_2(\eta_R) \quad (9.138)$$

と表すことが出来る。物体の影響は、翼の先端から出る波 (物体上面側では η 線、物体下面側では ξ 線) より上流側には出ない。ここで、点 Q は、点 P と同じ η 線上にあり、かつ、物体表面上の点である。つまり、点 P を通る η 線はこの物体表面上の点 Q から出ている。同じく、点 R は、点 P と同じ ξ 線上にあり、かつ、一番上流側の η 線上の点である。この η 線は翼先端の点 A から発生している。この η 線より上流側では M_∞ の一様流であるので、ここでの擾乱成分は 0 となる。従って、

$$f_2(\eta_R) = 0 \quad (9.139)$$

となる。従って、翼の上面側では、速度ポテンシャル ϕ は、 f_1 の成分のみ持つことになる。これを単純波と呼ぶ。

$$\phi_P = f_1(\xi_Q) \quad (9.140)$$

点 Q は物体表面 (上面) 上の点である。つまり、物体表面に沿う流れが物体表面上での変化だけから決定される。その変化が η 線に沿って点 P にまで到達することになる。

同様に、翼の下面側にある流れ場中の一点を P' とすると、そこでの速度ポテンシャル ϕ は、 f_2 成分しか持たないことになる。

$$\phi_{P'} = f_2(\eta_{Q'}) \quad (9.141)$$

点 Q' は、点 P' を通る ξ 線上にあり、物体表面 (下面) 上の点である。逆に言えば、点 Q' から ξ 線を引くと、そこに点 P' がある。

このように、物体上面側の流れ場は、 η 線だけが意味があり、逆に、物体下面側の流れ場では、 ξ 線だけが意味がある。このような流れ場を単純波 (simple wave) で決定される場と呼ぶ。以上まとめると

- 上面側では、速度ポテンシャル ϕ は f_1 のみで表される。つまり、 $\phi = f_1(\xi)$
- 下面側では、速度ポテンシャル ϕ は f_2 のみで表される。つまり、 $\phi = f_2(\eta)$

となる。

ここで、上面の流れに対して、境界条件を適用する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{df_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dy} = -\beta \frac{df_1}{d\xi} \quad (9.142)$$

である。ただし、上面では、 $\xi = x - \beta y$ の関係を使用している。式 (9.133) に適用すると、

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} = -\beta \frac{df_1}{d\xi} = V_\infty \frac{dy_u}{dx} \quad (9.143)$$

となる。つまり、

$$\frac{df_1}{d\xi} = -\frac{V_\infty}{\beta} \frac{dy_u}{dx} \quad (9.144)$$

となる。これを ξ で積分し、 $\phi_u = f_1$ であることを考慮すると、

$$\phi_u = f_1(\xi) = -\frac{V_\infty}{\beta} \int_0^\xi \frac{dy_u}{dx}(\xi) d\xi = -\frac{V_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^\xi \frac{dy_u}{dx}(\xi) d\xi \quad (9.145)$$

となる。同様にして、下面側では、以下ようになる。

$$\phi = f_2(x + \beta y) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \beta \frac{df_2}{d\eta} \quad (9.146)$$

の関係があるので、これを境界条件式に代入すると、

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} = \beta \frac{df_2}{d\eta} = V_\infty \frac{dy_l}{dx} \quad (9.147)$$

となる。この式を η で積分すると、 f_2 つまり、 ϕ_l が得られる。

$$\phi_l = f_2(\eta) = \frac{V_\infty}{\beta} \int_0^\eta \frac{dy_l}{dx}(\eta) d\eta = \frac{V_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^\eta \frac{dy_l}{dx}(\eta) d\eta \quad (9.148)$$

となる。

翼上面における x 方向の速度の擾乱成分は式 (9.145) と式 (9.137) から、

$$u(x, +0) = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{V_\infty}{\beta} \frac{dy_u}{dx}(\xi) \cdot 1 = -\frac{V_\infty}{\beta} \frac{dy_u}{dx} \quad (9.149)$$

となる。

同様にして、翼下面における x 方向の速度の擾乱成分はそれぞれ式 (9.148) と式 (9.137) から、

$$u(x, -0) = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{V_\infty}{\beta} \frac{dy_l}{dx}(\eta) \cdot 1 = \frac{V_\infty}{\beta} \frac{dy_l}{dx} \quad (9.150)$$

となる。

従って、これらの式を使って、圧力係数は式 (5.17) より、上面の圧力係数 C_{p_u} と下面の圧力係数 C_{p_l} は、それぞれ

$$C_{p_u} = -\frac{2u(x, +0)}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty} \left(-\frac{V_\infty}{\beta} \frac{dy_u}{dx} \right) = \frac{2}{\beta} \frac{dy_u}{dx} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{dy_u}{dx} \quad (9.151)$$

$$C_{p_l} = -\frac{2u(x, -0)}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty} \left(\frac{V_\infty}{\beta} \frac{dy_l}{dx} \right) = -\frac{2}{\beta} \frac{dy_l}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{dy_l}{dx} \quad (9.152)$$

となる。

9.7.2 空気力 (縦三分力)

超音速流中に置かれた翼型に作用する揚力 L 、抵抗 D 、前縁まわりの頭下げモーメント M は、式 (9.151) と式 (9.152) を使って、

$$L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \int_0^l (C_{p_l} - C_{p_u}) dx = -\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \frac{2}{\beta} \int_0^l \left[\frac{dy_l}{dx} + \frac{dy_u}{dx} \right] dx \quad (9.153)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \int_0^l \left[C_{p_l} \left(-\frac{dy_l}{dx} \right) + C_{p_u} \left(\frac{dy_u}{dx} \right) \right] dx \quad (9.154)$$

$$= \frac{2}{\beta} \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \int_0^l \left[\left(-\frac{dy_l}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy_u}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (9.155)$$

$$M = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \int_0^l (C_{p_l} - C_{p_u}) x dx \quad (9.156)$$

$$= -\frac{2}{\beta} \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \int_0^l \left[\frac{dy_l}{dx} + \frac{dy_u}{dx} \right] x dx \quad (9.157)$$

となる。ここで、ピッチングモーメントは前縁まわりのモーメントで、頭下げが正である。この式から、薄翼の上面の形状方程式 $y_u(x)$ と下面の形状方程式 $y_l(x)$ が分かれば、揚力、抗力、モーメントがすぐに求められる。また、非圧縮性流のポテンシャル方程式では、2次元の場合、必ず抵抗が0になったが、超音速流のポテンシャル流れでは、抵抗は必ず発生して来ることに注意したい。

ちなみに、これらの式を無次元化して、空力係数 C_L, C_D, C_M を求めると、

$$C_L = -\frac{2}{\beta l} \int_0^l \left[\frac{dy_l}{dx} + \frac{dy_u}{dx} \right] \frac{dx}{l} \quad (9.158)$$

$$C_D = \frac{2}{\beta l} \int_0^l \left[\left(-\frac{dy_l}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy_u}{dx} \right)^2 \right] \frac{dx}{l} \quad (9.159)$$

$$C_M = -\frac{2}{\beta l^2} \int_0^l \left[\frac{dy_l}{dx} + \frac{dy_u}{dx} \right] \frac{x}{l} \frac{dx}{l} \quad (9.160)$$

となる。

ここで、物体表面の勾配を3つに分解する。

$$\frac{dy_u}{dx} = -\alpha + \theta + \frac{dh}{dx} \quad (9.161)$$

$$\frac{dy_l}{dx} = -\alpha + \theta - \frac{dh}{dx} \quad (9.162)$$

ここで、平均矢高の関数 (反り、camber) を $g(x)$ としたとき、 θ は平均矢高の傾き、つまり、 $\theta = dg(x)/dx$ である。また、 $h(x)$ は対称翼の厚み関数である。これらの式を x で積分すると

$$y_u = -\alpha x + g(x) + h(x) \quad (9.163)$$

$$y_l = -\alpha x + g(x) - h(x) \quad (9.164)$$

となる。また、反りの関数 $g(x)$ に関して、

$$\theta = \frac{dg}{dx}, \quad g(x=0) = g(x=l) = 0 \quad (9.165)$$

であるので、

$$\int_0^l \theta dx = \int_0^l \frac{dg}{dx} dx = 0 \quad (9.166)$$

となる。これを空力係数に代入する。式(9.158)から、

$$C_L = \frac{4}{\beta} \alpha = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (9.167)$$

となる。また、式(9.159)から

$$C_D = \frac{4}{\beta} \frac{1}{l} \int_0^l \left\{ (-\alpha + \theta)^2 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (9.168)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\alpha^2 + \overline{\theta^2} + \overline{\left(\frac{dh}{dx} \right)^2} \right) \quad (9.169)$$

となる。ここで $\overline{(\)^2}$ は自乗平均で

$$\overline{\theta^2} = \frac{1}{l} \int_0^l \theta^2 d\xi \quad (9.170)$$

である。

一般に、薄翼の場合には、抵抗係数は

$$C_{D_{tot}} = C_{D_{wave}} + C_{D_{th}} + C_{D_f} \quad (9.171)$$

に分割して考えることが出来る。ここで、 $C_{D_{wave}}$ は、揚力の発生に伴い生じる抵抗で、波動抵抗である。

$$C_{D_{wave}} = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (9.172)$$

揚力係数が式(9.167)より

$$C_L = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (9.173)$$

であるので、これに迎角 α を掛けたもので、主流方向の力の成分となる。これは、誘導抵抗である。ここで、誘導抵抗をまとめると、以下のようになる。

- 亜音速の場合には、3次元翼の翼端渦などの曳航渦による誘導抵抗
- 超音速の場合には、波動が原因となる抵抗

第2項は、厚みによる抵抗である。式(9.169)から、

$$C_{D_{th}} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\overline{\theta^2} + \overline{\left(\frac{dh}{dx} \right)^2} \right) \quad (9.174)$$

となる。つまり、超音速では勾配の自乗に比例して抵抗が増大する。超音速の翼では、少しでも翼表面の勾配が小さくなるように作る必要がある。そうでないと、抵抗となる。

最後に、 C_{D_f} は、摩擦による抵抗である。通常、 C_{D_f} は、0.005のオーダーである。

前縁まわりのモーメントは、式(9.160)から、

$$C_M = \frac{1}{2} \frac{4\alpha}{\beta} - \frac{2}{\beta} \frac{1}{l^2} \int_0^l x [d(g+h) + d(g-h)] \quad (9.175)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{S_1 - S_2}{l^2}$$

$$= \frac{1}{2} C_L + \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{S_1 - S_2}{l^2} \quad (9.176)$$

となる。ここで、頭上げが正である。この証明は、

$$\begin{aligned}
 \int_0^l \left(\frac{dy_l}{dx} + \frac{dy_u}{dx} \right) x dx &= \int_0^l x (dy_l + dy_u) \\
 &= \int_0^l -2\alpha x dx + x [d(g-h) + d(g+h)] \\
 &= -2\alpha \left(\frac{l^2}{2} \right) + x [d(g-h) + d(g+h)] \\
 &= -2\alpha \left(\frac{l^2}{2} \right) - (S_1 - S_2)
 \end{aligned} \tag{9.177}$$

である。また、 S_1 は、関数 $f = g + h$ ($f(0)=f(l)=0$) と x 軸とのなす領域の面積で、 S_2 は、関数 $f = g - h$ ($f(0)=f(l)=0$) と x 軸とのなす領域の面積である。

また、空力中心 x_{ac} (aerodynamic center) は

$$\frac{x_{ac}}{l} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha} \frac{S_1 - S_2}{l^2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{S_1 - S_2}{S^2} \right] \tag{9.178}$$

となる。ちなみに、空力中心とは、迎角が変化してもモーメントが変化しない点で、非圧縮性流では、前縁から翼弦長 (chord) の 25% 付近にあるが、この式では、係数が 1/2 となっており、超音速流では、空力中心が翼弦長の 50% 付近にあることを示している。

9.7.3 超音速翼

特徴としては、前縁および後縁は十分鋭く作る必要がある。せいぜい、前縁が少し丸みを帯びる程度である。そうでないと、離脱衝撃波 (detached shock wave) が発生し、抵抗が増大する。また、前述したように、超音速流での造波抵抗は厚み比の 2 乗で大きくなるので、厚み比を小さくする必要がある。

薄翼理論 (微小擾乱理論) を適用するためには、

- 迎角が非常に小さいこと。実際、超音速で飛ぶ場合には、動圧が大きくなり、その結果、揚力も増大するので、迎角は小さくてよい。
- $M_\infty^2 \delta \ll 1$ である必要がある。ここで、 δ は、翼の存在により一様流が曲げられる角度、つまり、流れの偏向角である。

超音速の航空機は、亜音速の航空機より大きな抵抗係数を持つ。これは、波動抵抗が大きいためである。航空機にとって、揚抗比 L/D が大事なパラメータとなる。ちなみに、B747 は $L/D = 17$ 、超音速機のコンコルドは $L/D = 7$ である。一般に、揚抗比は抵抗発散マッハ数 M_{DIV} を超えると、急激に減少し、 $M = 1.2$ を超えると、なだらかに減少する。

9.7.4 平板に作用する空気力

上述の関係式を使って、超音速流を飛行する平板に作用する空気力をまとめると以下ようになる。

- 圧力分布 :

$$C_{pu} = \frac{2}{\beta} \alpha \quad (\text{上面}) \qquad C_{pl} = -\frac{2}{\beta} \alpha \quad (\text{下面}) \tag{9.179}$$

- 揚力係数 :

$$c_L = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (9.180)$$

- 抵抗係数 :

$$c_D = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (9.181)$$

- ピッチングモーメント (中心周り) :

$$c_M = 0 \quad (9.182)$$

非圧縮性流のポテンシャル流れでは、抵抗が0であったが、超音速流のポテンシャル流れでは、抵抗が発生する。これ揚力に依存する抵抗で、誘導抵抗と呼ばれる。

ちなみに、揚抗比 L/D は、

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{1}{\alpha} \quad (9.183)$$

となる。つまり、超音速の場合には、迎角をあまり取らない方が揚抗比は良くなると考えられる。

さらに、式 (9.182) から、翼中心 ($x = l/2$) でのピッチングモーメントは、迎角に関係なしに一定 (=0) であるので、翼中心 ($x = l/2$) が空力中心となる。ちなみに、非圧縮背性流では、 $x = l/4$ の点が空力中心である (テキスト「非圧縮性流」を参照)。

9.7.5 楔翼に作用する空気力

楔翼の中で一番簡単な形状は、二重楔翼である。つまり、上面と下面が対称で、 $x = x_f$ で上面の最大値 $y = f$ をとるものとする。従って、下面では、 $x = x_f$ で下面の最小値 $y = -f$ をとる。迎角が 0° の場合、揚力係数 C_L 、 C_D 、 C_M は

$$C_L = 0 \quad (9.184)$$

$$C_D = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \bar{\omega}^2 = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{(f/l)^2}{(x_f/l)(1 - x_f/l)} \quad (9.185)$$

$$C_{M1/2} = 0 \quad (9.186)$$

である。ここで、

$$\bar{\omega}^2 = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 dx \quad (9.187)$$

$h(x)$ は対称翼の厚み関数で、 $f = h(x_f)$ である。

$x_f = l/2$ の場合には、抵抗係数 C_D は、簡単化されて

$$C_D = \frac{16}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{f}{l} \right)^2 = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \tau^2 \quad (9.188)$$

となる。

より一般的な楔形状の翼が迎角を持つときには、

$$C_L = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (9.189)$$

$$C_D = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\frac{(f_1/l)^2}{(x_1/l)(1 - x_1/l)} + \frac{(f_2/l)^2}{(x_2/l)(1 - x_2/l)} \right] \quad (9.190)$$

$$C_{M1/2} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{f_1 - f_2}{2l} \quad (9.191)$$

となる。ここで、 α は、楔の前縁と後縁を結んだ中心線が一樣流となす角である。また、上面では $f_1 = h(x_1)$ で、下面では、 $f_2 = h(x_2)$ で、厚みが最大となる。上面と下面ではずれがあることに注意。

9.7.6 円弧翼に作用する空気力

- 揚力係数 :

$$c_L = 0 \quad (9.192)$$

- 抵抗係数 :

$$c_D = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{16}{3} \left(\frac{f}{c} \right)^2 \quad (9.193)$$

- ピッチングモーメント (中心周り) :

$$c_{M1/2} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{4f}{3c} \quad (9.194)$$

ここで、 $x = l/2$ で円弧翼の反りが最大となり、その時の反りの量が f である。 f/c は反り比である。従って、この円弧翼の曲率半径は、

$$R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f} \quad (9.195)$$

である。

9.8 リーマン問題

リーマン問題 (Riemann problem) は、ショックチューブの問題として大変重要であり、また実用性も高い。簡単に言えば、仕切り板で 2 つの流れが仕切られており、それを瞬間的に取り外したときに、その後どのような流れが発生するかを調べる問題である。この流れには、衝撃波 (shock wave)、contact surface (contact discontinuity)、膨張波 (expansion wave) が発生する。

(参考) 流れの数値シミュレーションでよく使われるゴドノフ法は、リーマン問題の解を使う方法である。ただ、後述するように繰り返し計算が必要なため、計算コストが掛かる。これを簡略化した、近似リーマン解法を使用するのが Roe の方法である。(参考了)

仕切り板の左右での初期条件 ($t = 0$) を以下のように定義する。 $x = 0$ に仕切り板があるとする。

$$u = u_l, \quad p = p_l, \quad \rho = \rho_l \quad (x < 0), \quad u = u_r, \quad p = p_r, \quad \rho = \rho_r \quad (x > 0) \quad (9.196)$$

ここでは、 $p_r < p_l$ の場合を考える。

破膜すると、初期での圧力の不連続は右側に (x の正の方向) 伝播する。つまり圧力の低い方に伝播する。と同時に膨張波 (expansion fan) は圧力の高い方に (つまり x の負の方向に) 伝播する。加えて、初期に 2 つの流体の境となっていた接触不連続 (contact discontinuity) は右方向に伝播する。衝撃波と不連続面は、一定の状態に向かって進行するので、伝播速度は一定である。一方、膨張波は初期の膜の位置を原点として、扇状に発生する。

9.8.1 衝撃波

衝撃波は、領域 R と領域 2 の間に存在する。領域 2 での圧力、密度、速度を p_2, ρ_2, u_2 とすれば、垂直衝撃波の関係式 (ランキン・ユゴニオの関係式 (7.32)) より、以下の関係が得られる。ただし、 $P = p_2/p_r$ とおく。

$$\frac{\rho_2}{\rho_r} = \frac{1 + \alpha P}{\alpha + P}, \quad \alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (9.197)$$

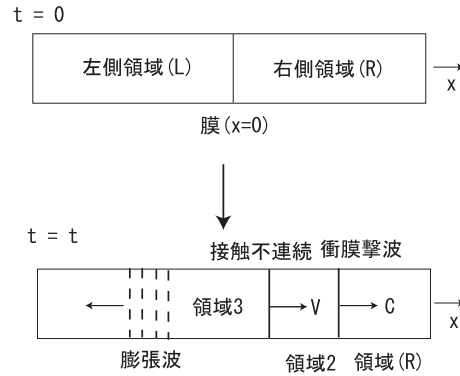


図 9.15: 初期状態 ($t=0$) とその後 ($t=t$) での衝撃波、不連続面、膨張波の伝播

その他、速度、マッハ数、音速に関しては、以下の関係式が成立する。

$$\frac{u_2 - u_r}{c_r} = \frac{P - 1}{(1 + \alpha P)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma(\gamma - 1)/2}} \quad (9.198)$$

$$M = \frac{C - u_r}{c_r} = \frac{(P - 1)c_r}{\gamma(u_2 - u_r)} \quad (9.199)$$

$$\left(\frac{c_2}{c_r}\right)^2 = P \frac{\alpha + P}{1 + \alpha P} \quad (9.200)$$

ここで、 C は領域 R に向かって伝播する衝撃波の伝播速度である。最後の式 (9.200) は音速の式 $c^2 = \gamma p / \rho$ を使えば出てくる。

(参考 1) 式 (9.198) の誘導。衝撃波前後の運動量の関係式である式 (7.3) より、

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = \rho_1 u_1^2 - \rho_1 u_1 u_2 \quad (9.201)$$

最後の式は、質量流量の保存式 (7.2) を適用した。これを $\rho_1 c_1^2$ で割り、展開すると、

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_1 c_1^2} = \frac{u_1}{c_1} \cdot \frac{u_1}{c_1} - \frac{u_1}{c_1} \cdot \frac{u_2}{c_1} = \frac{M_1}{c_1} (u_1 - u_2) \quad (9.202)$$

となる。今、上の式は、衝撃波は静止しているものとして (つまり衝撃波に乗って見ている) 扱っているため、その対応は、

$$u_1 \rightarrow C - u_r, \quad u_2 \rightarrow C - u_2 \quad (9.203)$$

となる。したがって、式 (9.202) は、

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_1 c_1^2} = \frac{M_1}{c_1} \{(C - u_r) - (C - u_2)\} = \frac{M_1}{c_1} (u_2 - u_r) \quad (9.204)$$

となる。この式から、左辺が $(u_2 - u_r)/c_1$ となるように変形すると、

$$\frac{u_2 - u_r}{c_1} = \frac{1}{M_1} \cdot \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 c_1^2} = \frac{1}{M_1} \frac{p_1}{\rho_1 c_1^2} (P - 1) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{M_1} (P - 1) \quad (9.205)$$

ここで、音速の式 $c_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$ が使われている。式 (7.11) から、

$$P = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \rightarrow M_1^2 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(P + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \quad (9.206)$$

となる。これを式 (9.205) に代入して整理すると、

$$\frac{u_2 - u_r}{c_r} = \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma - 1)}} \cdot \frac{P - 1}{\sqrt{\alpha P + 1}} \quad (9.207)$$

が得られる。ここで、 $c_1 = c_r$ が使われている。(参考 1 了)

(参考 2) 式 (9.199) の誘導。式 (9.204) から M_1 を求めると、

$$M_1 = \frac{c_1}{u_2 - u_r} \cdot \frac{p_1(P - 1)}{\rho_1 c_1^2} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{c_r(P - 1)}{u_2 - u_r} \quad (9.208)$$

となる。ここで、音速の式 $c_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$ が使われている。また $c_1 = c_r$ である。(参考 2 了)

9.8.2 接触面

接触面 (contact surface) はこれを横切って密度が変化する。しかし、圧力と速度 (接触面に垂直方向) はこの面を横切って同じである。従って、接触面は、速度 V は、 $V = u_2$ で伝播する。従って、この接触面では、

$$p_3 = p_2, \quad u_3 = u_2 = V \quad (9.209)$$

の関係が得られる。

9.8.3 膨張波

膨張波は、左方向に伝播する特性曲線によって形成される。この特性曲線は、傾きが $dx/dt = u - c$ である。また、一番左側の領域 L と領域 3 との間の情報は、 C_0 と C_+ の特性曲線に沿って伝えられる。 C_0 特性曲線は、流跡 (path line, particle path) を表し、この特性曲線の傾きは、 $dx/dt = u$ である。この特性曲線の上では、エントロピーが一定であるために、

$$s_3 = s_l, \quad \frac{p_3}{\rho_3^\gamma} = \frac{p_l}{\rho_l^\gamma} \quad (9.210)$$

の関係が成立する。つまり、最初、一番左側の領域 R に存在した流体要素は、膨張波が左側に伝播して来て、その流体要素の上を通過すると、その流体要素は右方向に動き始める。一連の膨張波 (expansion fan) がその流体要素を通過してしまうと、この流体要素は、領域 3 に入る。

また、領域 R からは、 C_+ 特性曲線が右方向に伝播して、この膨張波を通過して領域 3 に到達する。この特性曲線の傾きは $dx/dt = u + c$ であり、この特性曲線の上では、次のリーマンの不変量 (Riemann invariant) が成立する。

$$\frac{\gamma - 1}{2} u_l + c_l = \frac{\gamma - 1}{2} u_3 + c_3 \quad (9.211)$$

つまりこの特性曲線の上では、 $(\gamma - 1)/2u + c = const$ なので、領域 L と領域 3 で同じ値になる。

(参考) リーマン不変量は、 C_+ 特性曲線と C_- 特性曲線の上で、以下の関係式で表される。ただし、ガスは完全気体の場合である。

$$J_+ = u + \frac{2}{\gamma - 1} c = const \quad (C_+ \text{ 特性曲線上で}) \quad (9.212)$$

$$J_- = u - \frac{2}{\gamma - 1} c = const \quad (C_- \text{ 特性曲線上で}) \quad (9.213)$$

あるいは、以下のように表すこともできる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \right] J_+ = 0 \quad (9.214)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \right] J_- = 0 \quad (9.215)$$

(参考了)

式 (9.210) と式 (9.211) から、

$$V - u_l = \frac{2}{\gamma - 1} c_l \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_l} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \right] \quad (9.216)$$

の関係式が得られる。ちなみに、接触面の速度 V は、 $V = u_3$ である。

領域 2 と領域 3 では、それぞれ速度や圧力などの状態量が一定である。式 (9.198) において、 $u_2 = V$ とおけば (これは式 (9.209) から)、

$$\frac{V - u_r}{c_r} = \frac{P - 1}{(1 + \alpha P)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma(\gamma - 1)/2}} \quad (9.217)$$

となる。これは、接触面の速度 V と圧力比 P との関係である。

一方、接触面をまたいで圧力が変化しないことより、 $p_3 = p_2$ となり、式 (9.216) の中にある、 p_3/p_l を変形すると、

$$\frac{p_3}{p_l} = \frac{p_2}{p_r} \cdot \frac{p_r}{p_l} = P \cdot \frac{p_r}{p_l} \quad (9.218)$$

となる。これを使うと、式 (9.216) は、

$$V - u_l = \frac{2}{\gamma - 1} c_l \left[1 - \left(P \cdot \frac{p_r}{p_l} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \right] \quad (9.219)$$

式 (9.217) と式 (9.219) から、接触面の速度を除去すると、(具体的には、両方の式から V/c_r を求め、これを等しいとおく。)

$$\sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma - 1)} \frac{P - 1}{(1 + \alpha P)^{1/2}}} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{c_l}{c_r} \left(\frac{p_r}{p_l} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \left[\left(\frac{p_l}{p_r} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} - P^{(\gamma-1)/2\gamma} \right] + \frac{u_l - u_r}{c_r} \quad (9.220)$$

この式から、圧力比 $P = p_2/p_r = p_3/p_r$ を求める。この式は非線形であるので数値的に解く。つまり、反復法で解を求める。

圧力比 $P = p_2/p_r = p_3/p_r$ が決定された

この P を使えば、各量が以下のように決定される。

- 式 (9.197) → ρ_2
- 式 (9.198) → $u_2 = u_3$
- 式 (9.199) → C
- 式 (9.200) → c_2

である。

9.8.4 膨張波内の状態量の決定

この領域を領域 5 とする。ここでは、領域 3 で成立した関係式である、式 (9.210) と式 (9.211) が適用できる。

$$\frac{p_5}{\rho_5^\gamma} = \frac{p_l}{\rho_l^\gamma} \quad (9.221)$$

$$\frac{\gamma-1}{2}u_l + c_l = \frac{\gamma-1}{2}u_5 + c_5 \quad (9.222)$$

の関係が成立する。最初はエントロピーの式、次はリーマン不変量の式である。

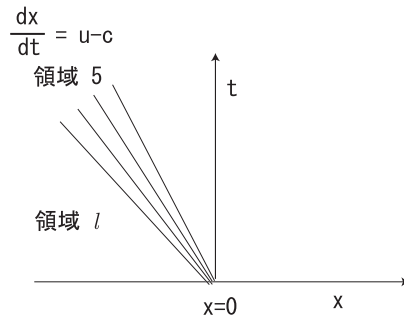


図 9.16: 領域 5 を構成する膨張波 (C_- 特性曲線)

一方、膨張扇 (expansion fan) そのものは、 C_- の数多くの特性曲線から構成されている。この特性曲線 C_- の上では、リーマン不変量が一定となる。つまり、

$$\frac{\gamma-1}{2}u_5 - c_5 = const \quad (9.223)$$

また、各々の特性曲線の傾きは、

$$\frac{dx}{dt} = u_5 - c_5 \quad (9.224)$$

である。例えば、 $u_l = 0$ の場合 (静止している場合)、一番左側にある特性曲線では、 $u = 0$ であるため、 $dx/dt = -c$ となり、膨張波を通過した流れは、右方向の速度を持つため (つまり、 $u > 0$)、 $dx/dt = u - c$ となり、特性曲線の傾きは、絶対値が小さくなり (マイナスの値が減少する)、特性曲線は起き上がってくる。これが右方向に順番に起こる。

式 (9.222) と式 (9.223) を加えると、

$$(\gamma-1)u_5 = \frac{\gamma-1}{2}u_l + c_l + const \quad (9.225)$$

となり、 u_5 は各特性曲線に沿って一定値をとることがわかる。

u_5 が一定値であれば、式 (9.223) から、 c_5 も一定であることがわかる。従って、式 (9.224) の右辺は一定となり、このことから、積分して ($t = 0$ で原点 $x = 0$ にあるとして)、

$$x = (u_5 - c_5)t \quad \rightarrow \quad \frac{x}{t} = u_5 - c_5 \quad (9.226)$$

となる。

式 (9.222) と式 (9.226) より、

$$u_5 = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} + c_l + \frac{\gamma - 1}{2} u_l \right) \quad (9.227)$$

u_5 は、

$$0 < u_5 < V \quad (9.228)$$

であるので、式 (9.227) より、 x/t の範囲は、

$$-\left(\frac{\gamma - 1}{2} u_l + c_l \right) < \frac{x}{t} < \left(\frac{\gamma + 1}{2} V - c_l - \frac{\gamma - 1}{2} u_l \right) \quad (9.229)$$

となる。

また、領域 5 での音速 c_5 は、式 (9.222) より、

$$c_5 = c_l - \frac{\gamma - 1}{2} (u_5 - u_l) = u_5 - \frac{x}{t} \quad (9.230)$$

となる。

さらに、圧力 p_5 は、式 (9.221) と音速の式 $c^2 = \gamma p / \rho$ を使って、

$$p_5 = p_l \left(\frac{c_5}{c_l} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (9.231)$$

となる。また、密度は、先ほどの音速の式を使って得られる。

$$\rho_5 = \gamma \frac{p_5}{c_5^2} \quad (9.232)$$

以上で、リーマン問題の全ての領域における量が決定された。

第10章 ノズルとジェット

ノズル (nozzle) はジェットなど高速流を得るための有用な装置である。簡単に言えば、ノズルは、流れを加速する装置である。ノズルから大気に流れが噴出する場合、ノズルの貯気槽 (reservoir) の圧力 p_0 と、大気の圧力 (雰囲気圧あるいは背圧: ambient pressure) p_a との比により、様々なジェットのパターンが発生する。例えば、ロケットが地上からだんだん上空に行くに従い、周りの大気圧が小さくなるため、圧力比 p_0/p_a が増大し (p_a が減少するため)、ロケットノズルから出た排気プルームは大きく膨張するようになる。地上付近でのプルームの拡がりと比較すると、その違いは歴然である。

ちなみに、もう少し厳密に言えば、ノズル出口での圧力 p_e も、ジェットのパターンを決定する大事な特性量である。亜音速流ではノズル出口での圧力 p_e は、雰囲気圧 p_a と等しくなるが ($p_e = p_a$)、超音速流では、必ずしも等しくない (一般的には $p_e \neq p_a$)。その結果、ノズル出口を出た後、衝撃波や膨張波を発生させ、ジェットの圧力が雰囲気圧 p_a に等しくなるように調整している。

高速ジェットは、ジェットエンジンの他に、産業界で様々な用途に使われている。

10.1 音速ノズル

高速流において、ノズル断面が流れ方向に単調に絞られる場合のノズルを音速ノズル (sonic nozzle) と呼ぶ。低速流も含めた場合には、コンバージェント・ノズル (convergent nozzle) と呼ばれる。

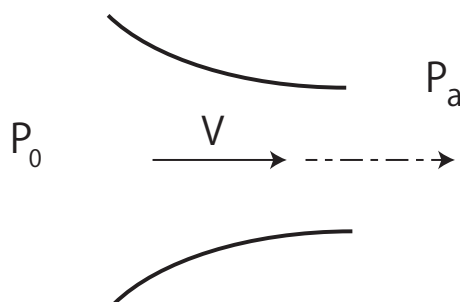


図 10.1: 音速ノズル

背圧 p_a が貯気槽圧 p_0 からあまり変化しない場合は、ノズル内の流れは亜音速である。さらに、背圧 p_a を下げていくと、ちょうどノズルの出口の所で、マッハ数が1になる。具体的には、 $p_a/p_0 = 0.53$ の場合に出口でのマッハ数が $M = 1$ になる。これ以上背圧を下げてノズル内のマッハ数分布は変化しない。これを流れがチョーク (choke) したと言う。このとき、流量も変化しなくなる。雰囲気圧 p_a が小さい場合、ノズル出口を出た流れは、ショックセル (shock cell) という現象を引き起こし、下流方向にセル構造が周期的に観察される。このように、ノズル出口でのジェット圧 p_e が背圧 p_a よりも大きい場合を不足膨張 (underexpansion) と呼び、ノズル出口を出た後、流れは膨張する。

ここまでは、貯気槽圧 p_0 を一定にして、背圧（雰囲気圧） p_a を下げていく場合を考えたが、逆に、背圧 p_a を一定にしておいて（例えば背圧を大気圧にする）、貯気槽圧 p_0 を上げていっても、同じような現象が起こる。 $p_a/p_0 = 0.53$ になったとき、例えば背圧が大気圧であれば、貯気槽が 1.9 気圧になったとき、ノズル出口で流れが音速に到達する。ここで注意することは、貯気槽圧をどんどん上げた場合に、ノズル出口でマッハ数は 1 のままであるが、ノズル出口での圧力は p_e はどんどん上がることである。その結果、質量流量も増え続ける。流量が一定にとどまることはない。これに伴い、不足膨張の程度も増加する。

ちなみに、音速ノズルの場合で、後述する不足膨張ジェットの場合（ジェット出口圧が雰囲気圧より高い場合）には、以下のパラメータ M_j (fully expanded jet Mach number) が良く使われる。これは、ジェットがノズルを出た後、十分膨張したときのマッハ数を表す。

$$M_j = \left\{ \left[\left(\frac{P_0}{P_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \frac{2}{\gamma-1} \right\}^{1/2} \quad (10.1)$$

ここで、 γ は比熱比 ($\gamma = C_p/C_v$) で、 P_0 は貯気槽圧力、 P_a はノズル出口外側の雰囲気圧である。

10.2 超音速ノズル

ノズルの形状としてその断面積を一度狭めて、もう一度広げた時に、ノズル出口では超音速の流れが発生する。このような形状のノズルを超音速ノズル (supersonic nozzle) と呼ぶ。

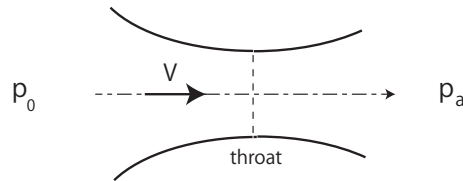


図 10.2: 超音速ノズル

この場合にも、

- 背圧 p_a が貯気槽圧 p_0 とあまり変わらなければ、ノズル内の流れは亜音速流となる。この状態では choke は起きていない。
- 貯気槽圧 p_0 を同じにして、さらに背圧 p_a を下げていくと、スロート (throat) でちょうどマッハ数が 1 になる。しかし、その後、拡大管部では、流れは亜音速流に戻っていく。
- さらに外側の圧力（雰囲気圧）を下げると、スロートを過ぎ、拡大管部に入った少しの間では、超音速流が発生する（超音速流の領域では、下流方向に圧力は減少する）。しかし、ある場所で衝撃波が発生し、そこで圧力が不連続的に上昇し（流れの速度が不連続的に減少し）、亜音速流に変化する。そして、この亜音速流の領域では、下流に行くに従い、圧力は増加していく。最後には、ノズル外側の雰囲気圧 p_a に一致する。
- さらに雰囲気圧 p_a を下げると、スロートより下流の拡大管部の全領域で超音速になる。
- 雰囲気圧をさらに下げると、拡大管部内の流れは全く変化しないで、ノズル出口を出た流れが雰囲気圧 p_a の圧力を持つように調整される。上述したように、これは不足膨張であり、ノズル出口を出た後、ジェットは膨張する。

10.3 ノズル噴出流のパターン

上述の音速ジェットや超音速ジェットにおいても述べたように、ノズル出口での圧力 p_e と、ジェットが噴出していく外側の流れ場（あるいは静止場）での圧力 p_a （これを雰囲気気圧；ambient pressure と呼ぶ）との相対的な大きさにより、ジェットがノズルを出た後、3種類のジェットパターンが発生する。

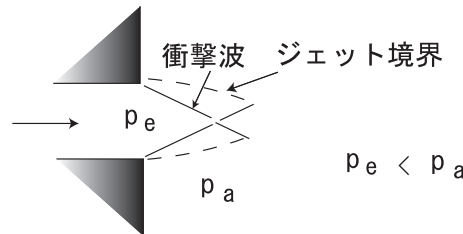


図 10.3: 過膨張の場合

- $p_e < p_a$ の場合:これを過膨張 (over-expansion) と呼ぶ (第 10.3 図):
 ジェット出口の圧力 p_e が雰囲気気圧 p_a より低い場合で、外側の圧力 p_a と一致させるために、ノズルリップよりジェット内に向かって斜め衝撃波が発生し、ジェット内の流れはこの斜め衝撃波を横切る事により、ジェットの圧力が増大し、外側の雰囲気気圧に等しくなるように調整される。これは例えばロケットノズルから噴出されるブルームの地上付近での流れがこれに相当する。地上付近では大気圧が 1 気圧であるために、雰囲気気圧 p_a は、ロケットノズル出口での圧力 p_e より大きくなる。
- $p_e = p_a$ の場合:これを適正膨張 (optimum expansion) と呼ぶ (第 10.4 図):
 ジェット吹き出し口の圧力が雰囲気気圧と同じになる場合で、ジェットはそのまま雰囲気気場にスムーズに流れて行き、大きな変化は起こらない。この場合、ジェットせん断層の粘性による拡散が主となる。

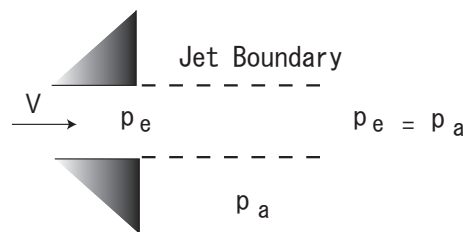


図 10.4: 適正膨張の場合

- $p_e > p_a$ の場合:これを不足膨張 (under-expansion) と呼ぶ (第 10.5 図):
 ジェット吹き出し口の圧力が雰囲気気圧より大きく、まだ十分膨張しきれていないので、ジェット吹き出し口の縁から膨張波が発生し、ジェットは外側に大きく膨張する。ジェット吹き出しマッハ数が大きい場合には、この膨張波が jet boundary で反射して、圧縮波となりジェット中心軸側に戻ってくる。一方、ジェット吹き出しマッハ数が音速に近い場合には、膨張し過ぎた場合には barrel shock(たる型衝撃波)が発生し、外側の圧力 (雰囲気気圧) と一致させるようにす

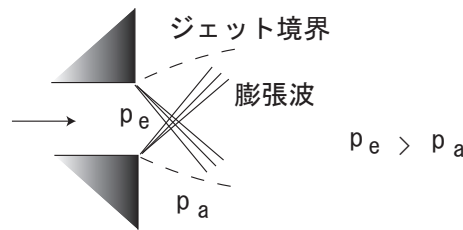
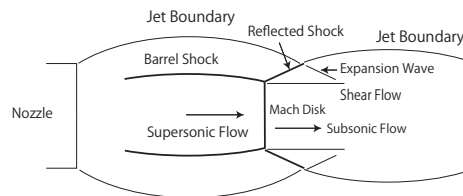


図 10.5: 不足膨張の場合

る。barrel shock の下流側では、通常マッハディスクができ、その後ろの流れは亜音速流となる。また、barrel shock の端から反射衝撃波が発生する。

図 10.6: barrel shock ができる場合 (例えば、音速ジェットで、 $p_0/p_a = 10$ の場合)

10.4 ロケットノズルの形状

ロケットエンジン推力チャンバーなどあらゆる超音速流デバイスの特徴は、縮小・拡大ノズル (convergent-divergent nozzle) の使用である。ここでは、流れが亜音速から超音速に加速される。このとき、亜音速流は縮小管で起こり、超音速流は拡大管で起こる。ちょうどそのつなぎ目で $M = 1$ となる。ここをスロート (throat) と呼ぶ。

亜音速流が発生する縮小部では、種々のノズル形状が考えられ、それは通常問題なく機能する。この領域では、流れは形状の変化にそんなに敏感ではない。簡単な円錐形状で、上流の燃焼部 (円筒形状) にスムーズに接続させ、また、他端はスロートに壁での接続部コーナーを丸くして滑らかに接続させれば十分である。拡散筒の部分は、円錐形状が一番簡単で、初期の頃のロケットでは、実際使われた。円錐の拡がり角は、重要な要素である、長さ、質量、摩擦損失との間で妥協点が見出される。ただ、拡がり角が大きい場合には、流れが軸方向 (x 方向) からずれるため、それによる損失が増大する。

古典的な最適円錐ノズルは、約 15° の半頂角を持つ。この角度は、低圧力のエンジン (ノズル内での膨張がそんなに大きくない) では良好に機能する。より高い性能を求めて、チャンバー圧や膨張を大きくすると、円錐ノズルは不十分な性能となる。そのような場合には、円錐ノズルの長さを長くする必要があり、重量や慣性モーメントが増加するという欠点がある。つまり、推力ベクトルを変更するためのノズルのジンバリング (gimballing: ノズルの取り付け角度を変えること) が困難となる。

円錐ノズルに取って代わるものが、ベル型ノズル、つまり整形ノズル (contoured nozzle) である。この概念は、最初に大きな角度で流れを膨張させて、その後、流れがほぼノズル軸に平衡になるように変えることである (ほとんどのノズルは、ノズル出口でも多少の拡がり角を持っており、おおよそ 2° 程度である)。ノズル内で複雑な流れが生じないように (つまり、ノズル壁から反射する圧力波や

膨張波の強度を弱めるように) する必要がある。そのためには、このテキストの超音速流で勉強した特性曲線理論が役に立ち、実際これを使ってノズルが設計されてきた (最近では、CFD(数値流体力学) が使われる)。

整形ノズルは、実際、 15° の半頂角を持つ同じ膨張比の円錐ノズルに対するパーセント比で呼ばれる。例えば、80% ベルと言え、等価な円錐ノズルの 80% 長さである。ベルノズルと円錐ノズルの効率 (推力係数) はほぼ同じである。ベルノズルの出口での流れは、ほぼノズル軸に平行であり、これがベルノズルのメリットになるが、途中で流れの向きを変更する損失が、このメリットを減らしてしまう。つまり、スロートの後で急激に流れを膨張させるのが効率を悪くしている。高速風洞で使われているような、スロートの後で徐々に拡げていくやり方もあるが、ノズルが長くなり、重さや容積、さらにコストなどが増大する。

10.5 推力

ロケットエンジンの推力 (thrust) に対する方程式は、

$$T = \dot{m}V_e + (p_e - p_a)A_e \quad (10.2)$$

である。ここで、 T は推力、 \dot{m} は質量流量 ($\rho_e V_e A_e$)、 ρ_e はノズル出口での密度、 V_e はノズル出口での速度、 p_e はノズル出口での圧力、 p_a は雰囲気気圧、 A_e はノズル出口面積である。推力を大きくするには、質量流量 \dot{m} を大きくするか、排気ガスの速度 V_e を大きくする必要がある。

10.6 比推力

エンジンの大きさや作動時間ではなく、エンジンの効率に焦点を絞ると、比推力 (specific impulse) を定義すると便利である。ロケットエンジンのマイレージ (mileage) を表す。

$$I_{sp} = \frac{I}{m_p} = V_{eq} = \frac{T}{\dot{m}} \quad (10.3)$$

これは、基本的な物理に基づいた定義である。ただ、エンジニアリングの世界では、重量流量を使うことが慣わしで、その場合、以下の式になる。

$$I_{sp} = \frac{I}{m_p g} = \frac{V_{eq}}{g} = \frac{T}{\dot{m} g} \quad (10.4)$$

この場合の単位は秒である。エンジンの出力 T をエンジン 1 秒間に消費する推進剤の重量 $\dot{m}g$ で割ったものである。あるいは、排気ガス 1kg 当り、1 N の力を何秒持続できるかを表す。比推力が大きいほど優れた推進剤を意味する。スペースシャトルで約 450 秒、LE7A エンジンが 450 秒である。イオンエンジン (ion thruster) は比推力が例えば 3000 秒と大きい、推力 (thrust) は小さい。宇宙航行など長時間時間が掛かる場合には、大きな推力ではなく、小さな推力を長時間出し続けるエンジンが適している。

10.7 運動量係数

ジェットはその他にも使用される。航空宇宙機では、大気のあるところでは舵面を使用して航空宇宙機の姿勢を制御する。大気の無いところでは、あるいは大気が薄くて、動圧 ($(1/2)\rho v^2$) が小さい

ところでは、RCS(Reaction Control System) を使用する。航空宇宙機の姿勢を制御するのに使用する外力は、基本的にこの 2 つである。

スペースシャトルでも使用されている RCS(Reaction Control System) など、ジェットを噴射させ、その反作用で、航空宇宙機の姿勢を制御する問題は数多く存在する。この問題のパラメータは、運動量係数である。

$$C_{\mu} = \frac{\dot{m}_j V_j}{(1/2)\rho_{\infty} U_{\infty}^2 S_{ref}} = \frac{\gamma(2/(\gamma+1))^{\gamma/(\gamma-1)} p_{0j} S_j}{(1/2)\rho_{\infty} U_{\infty}^2 S_{ref}} \quad (10.5)$$

このように、ジェットの総圧を変化させると、運動量係数を変える事ができる。

10.8 ジェットの衝撃波セル構造

超音速ジェットは吹き出した後、ソロバン玉と呼ばれるセル構造が観察される。ジェット戦闘機のエンジン(アフターバーナー付きなど)から吹き出す流れではよく見られる。

ジェットのセル構造の波長 λ は、以下の Prandtl の式で与えられる。

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{1}{2.405} \pi (\bar{M}^2 - 1)^{1/2} \quad (10.6)$$

ここで、 λ は波長、 D はジェットの平均直径、 \bar{M} は平均のマッハ数である。 \bar{M} の計算の仕方は、総圧 p_0 の気体が雰囲気気圧 p_a まで自由膨張したとして

$$\frac{p_0}{p_a} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{M}^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (10.7)$$

計算される。

ちなみに、この衝撃波セル構造と、ジェット境界で発生した渦とが干渉して、スクリーチ音と呼ばれる離散音の原因となるものが作られる。この発生源とノズル出口との間のフィードバックループで、一定の周波数の音が発生する。

不足膨張の場合の矩形ジェットのセル長さ L は、Tam によって誘導されている。

$$L = \frac{2(M^2 - 1)^{1/2} h}{(1 + h^2/b^2)^{1/2}} \quad (10.8)$$

ここで、 b はジェットの幅で、 h はジェットの高さである。

10.9 亜音速ジェット

マッハ数 $M=0.5$ の亜音速ジェット (subsonic jet) の数値シミュレーションから以下のようなことが分かる。

- 最初に軸対称的な渦輪の巻き上がり (roll-up) が起こり、その後、渦輪同士が合体し、 $x = 4D$ 付近から発生する軸方向の渦度成分 (rib) により、渦輪が 3 次元化する。
- ジェットせん断層の不安定より生じた渦は、ジェット径 D の 3 ~ 4 倍と 5 ~ 6 倍の下流側位置で合体し、圧力変動および速度変動はそこで極大となる。
- 渦の合体の過程で、レイノルズ応力は極大となり、せん断層を発達させるが、合体後は、 $-\overline{u'v'}\partial U/\partial y$ が負となる領域が生じ、せん断層の発達を抑制している。

- 圧力変動が極値となる場所での圧力の周波数は、それぞれ、ストローハル数で、 $S_t = 0.81, 0.42, 0.19$ の値を持つ (ストローハル数の定義は、 $S_t = fD/U_0$ である)。

その場所で、各周波数成分の空間分布で最大値をとり、渦が合体することにより、ストローハル数が約半分 ($S_t = 0.81 \rightarrow 0.42$ など) になっている。

ちなみに、亜音速ジェットでは、ジェットせん断層の組織構造 (coherent structure) が移流する速度 (convective velocity) は、ジェット速度 u_j に対して、 $C_1 u_j$ となる。ここで、係数 C_1 は、 $C_1 = 0.55 \sim 0.7$ である。

(参考) ジェットを計算するときの流入条件としてよく用いられるジェットの速度分布のモデル式は以下のものである。

$$u = \frac{U_0}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[\frac{25}{4} \left(\frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right) \right] \right\} \quad (10.9)$$

ここで、 U_0 はジェット中心での速度、 R はジェットの半径である。

(参考終わり)

10.10 超音速ジェット

マッハ数 $M = 1.5$ の場合、以下のような現象が起こる。

- $x = 5D$ 付近で発生する強い軸方向の渦度成分により渦輪の完全な合体が妨げられ、そのまま渦輪が3次元化する。
- 2度目の合体は観察されず、 $x = 6 \sim 7D$ よりも下流の領域では、主流方向に伸びた渦が数多く見られ、乱流で現れるワーム (worm) に似ている。この領域では、せん断層の成長および3次元性が抑制される傾向にある。

10.11 ジェットの拡がり

ジェットの拡がりを見るのには、以下のものが有効である。

- ジェットの速度半値幅
- 中心軸上の速度
- 質量流量の軸方向変化： エントレイン (entrain) を見るのに有効

ジェットが拡がるときの特徴は以下のようなものである。

- 非対称ジェットでは、亜音速流では対称ジェットよりわずかに早く拡がる。超音速になると、特にスクリーチが起こると、ずっと早く拡がる。lobed nozzle が拡がらないのは、スクリーチが存在しないからである。
- 小アスペクト比の楕円ジェットも円形ジェットよりは早く拡がる。
- ノズルにタブを入れると、亜音速・超音速とも拡がる。超音速では、vortex generator としてのタブを入れたことによって、スクリーチは消えてしまう。タブによって作られた一对の主流方向渦が最も良くジェットを拡げる。
- 圧縮性の影響として、マッハ数が高くなるほど、ジェットせん断層の混合が困難になる。

10.12 混合層

一般に混合層においては移流マッハ数 M_c は 0.6 以上で圧縮性の影響が顕著となる。非圧縮混合層の支配構造である Brown-roshko 構造のような 2 次元大規模渦の成長が抑制される。

混合層の移流マッハ数の増加に伴い、横波（横渦）に比べて斜行波（斜め渦、縦渦）の成長率が大きくなり、その結果、縦渦が混合層の支配的構造となる。

第11章 極超音速流

極超音速流 (hypersonic flow) とは、マッハ数が $M \gg 1$ の流れである。通常は、 $M \geq 5$ を極超音速流と考える。ただし、速度で考えた時には、

$$V = V_\infty + v, \quad v \ll V_\infty \quad (11.1)$$

と表すと、擾乱速度 v は、 V_∞ に比べれば小さいが、音速 a_∞ と比べるとそんなに小さくはない。従って、方程式を線形化することができない。つまり、極超音速の方程式は非線型である。ちなみに、超音速の流れは線型方程式で近似できる。

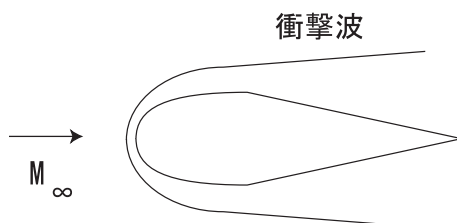


図 11.1: 極超音速での衝撃波

11.1 極超音速流の特徴

- 極超音速流の特徴の一つは、物体周りの流れの場合、衝撃波が物体表面に近づくことである。これは、一様流マッハ数 M_∞ が大きくなり、その結果、衝撃波角 β が小さくなるためである (図 7.3 参照)。流れの変化は、この狭い領域に限られ、この衝撃波と物体表面との間の領域を衝撃層 (shock layer) と呼ぶ。
- もうひとつの特徴は、熱の問題である。非常に速い流れが物体に衝突するために、物体先頭部で、速度が減速することによる温度上昇が生じる。また、物体表面に沿って粘性による熱発生がある。この運動エネルギー (kinetic energy) の散逸 (dissipation) はマッハ数の 2 乗に比例して増大する。ちなみに、散逸とは、運動エネルギーが熱エネルギーに変換されることである。
- 薄い物体でも、マッハ数が大きいため、衝撃波は強く、衝撃波下流でのエントロピー勾配は大きい。また、極超音速流では、一般に渦なし流れであると仮定できない (クロッコ (Crocco) の定理から、流線ごとにエントロピーが異なれば、渦度が発生する。7.7 節参照)。つまり、ポテンシャル流とみなすことができない。

11.2 高温での空気組成変化

高温になると空気の組成 (composition) は変化する。つまり、熱量的完全ガスでなくなる。熱量的完全ガス (calorically perfect gas) とは、比熱が温度によらず一定のガスである。

- 内部自由度が励起する。回転は比較的低い温度で励起する。さらに、1500K になると、窒素 N_2 や酸素 O_2 の振動励起が始まる。ちなみに、2 原子分子の振動は 2 自由度あり、一つは運動エネルギー (kinetic energy) で、もう一つは、ポテンシャルエネルギー (potential energy) である。振動励起は分子の衝突により起こる。
- 解離反応 (dissociation) が起こる。



- 化学反応 (chemical reaction) が生じる。化学反応も分子の衝突により起こる。



- 電子励起やイオン化 (電子を放出したり受け取ること) が起こる。
- 粘性係数 μ や熱伝導係数 k も温度によって急激に変化する。
- 熱力学的には、平衡状態 (equilibrium state) から非平衡状態 (nonequilibrium state) になる。分子同士の衝突が十分に行われる場合には、平衡状態が得られるが、不十分であれば、非平衡な状態になる。例えば、高度 100km 程度の大気上空における希薄流 (rarefied gas flow) の場合には、衝突が十分行われないため、凍結流 (frozen flow) のような非平衡状態になる。

(参考) 反応流 (reacting flow) のような混合ガス (gas mixture) の各成分の割合を記述するパラメータには、以下のものがある。

- 質量分率 (mass fraction) C_i (C_i の全ての値が分かれば、混合ガスの組成が決定される。)

$$C_i = \frac{\rho_i}{\rho} \quad (11.4)$$

- モル分率 (mole fraction) X_i

$$X_i = \frac{n_i}{n} = \frac{p_i}{p} \quad (11.5)$$

ここで、 n_i は i 種 (i species) のモル数 (the number of moles) で、 p_i は分圧 (partial pressure) である。以上の事から、質量分率とモル分率との間には、以下の関係がある。

$$C_i = X_i \frac{M_i}{M} \quad (11.6)$$

ここで、 M_i は化学種 i の分子量 (molecular weight)、また M は混合ガスの分子量である。

11.3 内部エネルギー

通常の温度では、分子の内部エネルギー e_i (単位質量当り) は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} e_i &= 3 \times \frac{RT}{2} + 2 \times \frac{RT}{2} + \frac{h\nu/kT}{\exp\{h\nu/kT\} - 1} RT + e_{el} \\ &= 3 \times \frac{RT}{2} + 2 \times \frac{RT}{2} + \frac{\Theta_v/T}{\exp\{\Theta_v/T\} - 1} RT + e_{el} \\ &= 3 \times \frac{RT}{2} + 2 \times \frac{RT}{2} + \frac{R\Theta_v}{\exp\{\Theta_v/T\} - 1} + e_{el} \end{aligned} \quad (11.7)$$

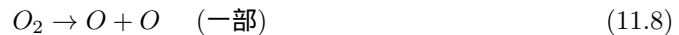
ここで、右辺第1項は、自由度が3の並進エネルギー (translational energy) で、第2項は、自由度が2の回転エネルギー、第3項は振動エネルギー、第4項は電子の励起エネルギー (excitation energy) である。振動エネルギーは、温度を上げて行くと、振動特性温度に相対的に励起される。 $\Theta_v \equiv h\nu/k$ は振動に対する特性温度で、酸素 O_2 では $2230K$ 、窒素 N_2 では $3340K$ である (従って、窒素の方がより高温で振動が励起される)。また、 h はプランク定数 (Planck constant)、 k はボルツマン定数、 ν は分子の基本周波数である。

(参考) 振動の特性温度として、酸素 O_2 は $2270K$ 、窒素 N_2 は $3390K$ 、一酸化窒素 NO は $2740K$ というデータもある。

(参考) 自由度とエネルギーの関係は、単位質量当りと言えば、1自由度当り、 $(1/2)RT$ のエネルギーを持つ。分子1個当りと言えば、 $(1/2)kT$ のエネルギーを持つ。

温度を上げて行った場合、空気の特性がどのように変化するかを見る。ここでは、高温状態での空気を構成する5種類の分子あるいは原子、つまり N, O, NO, N_2, O_2 を考える。

- $1,500K$: N_2, O_2 の振動励起が始まる。
- $3,000K$: O_2 の解離 (dissociation) が始まる。この温度は、地球上ではマッハ数が $M = 6$ 程度の飛行に相当する。



また、化学反応が起きて、 NO が発生する。



- $5,000 \sim 6,000K$: O_2 が完全に解離する。



また、 N_2 が部分的に解離する。



更にイオン化が始まる。



完全ガスの場合、一様な流れが静止させられたときに発生する温度上昇は、マッハ数が大きくなるほど大きくなる (表 (11.1) 参照)。これは、式 (2.25) から計算できる。この表で、 T_0 を求めるのに、一様流の温度として、 $T = 300K$ を使用している。ちなみに、各高度での大気温度を表 (11.2) に示す。この高度では、温度は $-50 \sim -60^\circ C$ である。

一方、流れの速度をエンタルピーを換算すると、おおよそであるが、流れの速度が $2km/s$ は $2.5MJ/kg$ に、また、 $10km/s$ は $45MJ/kg$ に相当する。 $10km/s$ は、大気圏に再突入するときのおおよその速度である。

ちなみに、宇宙からの再突入時には高速で大気圏に突入するため、熱発生が大きくなる。そこで、熱防御として、

マッハ数 M	温度比 T/T_0	総温 $T_0(K)$
4	0.2381	1260
6	0.1220	2459
8	0.07246	4140
10	0.04762	6300

表 11.1: マッハ数と温度上昇

高度 km	大気温度 K
10	223
30	227
50	210

表 11.2: 大気温度の高度による変化

1. アブレータ材 (ablator) による熱防護システム (heat shield)
2. c/c 材 (carbon-carbon composite) と断熱材による熱防護材システム
3. c/c 材と TPS(thermal protection system; シャトルではタイルを使用) 材による熱防護システム

などがある。

(参考) 高速流を実験室で作る場合、貯気槽のガスの温度を室温 (room temperature) とすると、例えば、 $T_0 = 300K$ とすれば、ラバールノズルを使って、 $M = 8$ の流れを作ったときに、温度比は $T/T_0 = 0.07246$ より、静温 T が $T \simeq 22K$ と、大変低温になる。ちなみに、空気の臨界温度は $T_{air} = 132K (-141^\circ)$ であるので、凝縮 (condensation) が起こる可能性がある。臨界温度とは、この温度以上になると、いくら圧力を上げて、液化しない温度である。従って、テストセクションでの流れの温度を上げるために、貯気槽のガスの温度を上げる必要がある。極超音速風洞では、ガスバーナーで熱したペブルの中を空気を通す方法がある。

11.4 比熱

極超音速流の特徴として、比熱 (specific heat) は一定ではなくなる。従って、熱量的完全ガスの仮定は用いることが出来ない。空気の等圧比熱 C_p は、高温になると極端に上昇する。具体的には、 $T = 6000K$ ぐらいから急激に上昇し、 $T = 8000K$ での C_p は、 $T = 288K$ での C_p の約 20 倍となる。この理由は、内部エネルギーにおける種々の自由度が励起されたり、また、化学反応やイオン化にエネルギーが使われるからである。 $T = 8000K$ を超えると、衛星速度 (satellite velocity; $7.9km/s$) に近くなる。

ちなみに、完全ガス (熱量的完全ガス) の場合には、式 (1.61) から

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \quad (11.15)$$

となる。ここで、 R は単位質量当りのガス定数で、空気の場合、 $R = 287(J/kg \cdot K)$ である。

11.5 極超音速流の解析

極超音速流の解析には以下の方程式が必要である。

- 連続の式
- 運動量の式
- 全エネルギー式
- 振動エネルギー式
- 各化学種の保存式

11.5.1 壁面境界条件

極超音速で飛行する宇宙機の物体表面上での境界条件として以下のものが考えられる。

- 粘着条件 ($u, v = 0$)
- 輻射平衡条件

$$q_w = \epsilon \sigma T_w^4 \quad (11.16)$$

ここで q_w は壁面での熱流束、 ϵ は放射率、 σ は Stefan-Boltzmann 定数 ($\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W/m}^2 \text{K}^4$) である。 q_w はフーリエの法則 (Fourier's law) などを使って

$$q_w = \left[k \frac{\partial T}{\partial y} + k_{vib} \frac{\partial T_{vib}}{\partial y} + \sum_i h_i J_i \right]_w \quad (11.17)$$

と表すことができる。ここで k は熱伝導係数、 T_{vib} は振動温度、 h_i は化学種 i (species i) のエンタルピーである。また、 J_i は化学種 i の拡散流束で、

$$J_i = \rho D_i \frac{\partial y_i}{\partial y} \quad (11.18)$$

と表される。ここで、 y_i は、化学種 i のモル分率である。

- 化学種の濃度に対する条件

$$\frac{\partial C_i}{\partial y} = 0 \quad \text{非触媒性壁 (NCW: non-catalytic wall)} \quad (11.19)$$

$$C_i = C_{i\infty} \quad \text{完全触媒性壁 (FCW: full catalytic wall)} \quad (11.20)$$

- 振動温度壁面条件

$$k_{vib} \frac{\partial T_{vib}}{\partial y} + \sum_i e_{vib,i} \rho D_i \frac{\partial C_i}{\partial y} = \sum_i \alpha_{vib,i} (e_{vib,i} - e_{vib,i}^{eq}) \quad (11.21)$$

ここで、 $e_{vib,i}$ は化学種 i の振動エネルギー、 $e_{vib,i}^{eq}$ は化学種 i の平衡振動エネルギーである。また、 $\alpha_{vib,i}$ は表面材に依存するパラメータ、 D_i は拡散定数である。

高度 (km)	密度 (kg/m ³) × 10 ⁹	温度 (K)	X _{O2}	X _{N2}	X _O	平均自由行程 (m)
200	0.3	1026	0.031	0.455	0.514	197.0
170	0.9	892	0.044	0.548	0.408	75.61
150	2.1	733	0.055	0.616	0.330	30.93
140	3.9	625	0.062	0.652	0.286	16.92
130	8.2	500	0.071	0.691	0.238	7.72
120	22.6	368	0.085	0.733	0.183	2.69
110	96.1	247	0.123	0.770	0.106	0.60
100	558.2	194	0.177	0.784	0.039	0.10

表 11.3: 上空での大気組成

11.6 上空での大気組成変化

地球大気上空では、高度によって大気組成が変化する。これを第 11.3 表に示す。ここで、 X_{O_2} 、 X_{N_2} 、 X_O は、それぞれ酸素分子、窒素分子、酸素原子のモル分率 (Mole fraction) である。モル分率とは、 N_s/N で定義され、 N_s は化学種 s のモル数、 N はガス全体のモル数である。この表で、平均自由行程 (mean free path) とは、分子と分子が衝突するまでの距離である。

(参考) 平均自由行程は、粘性係数 μ 、熱伝導係数 k 、拡散係数 D に影響を及ぼす。

平均自由行程が大きい場合には、希薄流 (rarefied gas flow) となる。希薄流は、クヌーセン数 K_n というパラメータで整理できる。逆に、流れが連続体 (continuum) である条件は、

$$\frac{\tau}{T} \ll 1 \quad \frac{l}{L} \ll 1 \quad (11.22)$$

である。ここで、 τ は粒子の平均衝突時間、 T は巨視的な代表時間、 l は平均自由行程、 L は巨視的な代表長さである。粒子の平均衝突時間は、

$$\tau \sim \frac{l}{\bar{c}} \quad (11.23)$$

で計算される。 \bar{c} は粒子の平均速さである。

以下の関係式

$$T \sim \frac{L}{U} \quad M \sim \frac{U}{\bar{c}} \quad (11.24)$$

を式 (11.22) の最初の式に代入すると、

$$MK_n \ll 1 \quad (11.25)$$

が得られる。ここで、 K_n はクヌーセン数 (Knudsen number) で、

$$K_n = \frac{l}{L} \quad (11.26)$$

である。

式 (11.25) に基づけば、以下の場合には、連続体ではなくなる。

- マッハ数が大きい場合

- クヌッセン数が大きい場合

ここで、クヌッセン数を書き換えていく。レイノルズ数は、

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (11.27)$$

である。ここで、 μ は粘性係数である。気体の粘性係数は

$$\mu \sim \rho \bar{c} l \quad (11.28)$$

と表すことができる。これを使えば、レイノルズ数は、

$$Re = \frac{U}{\bar{c}} \cdot \frac{L}{l} = \frac{M}{K_n} \quad (11.29)$$

となる。従って、クヌッセン数は、

$$K_n \sim \frac{M}{Re} \quad (11.30)$$

となる。これを式(11.25)に代入すれば

$$\frac{M^2}{Re} \ll 1 \quad (11.31)$$

の関係式が得られる。この関係式より、以下の場合には、連続体ではなくなる。

- マッハ数が大きい場合
- レイノルズ数が低い場合

より具体的には、

- $M/\sqrt{Re} > 0.01 \sim 0.1$ の場合： すべり効果 (velocity and temperature slip condition) すべり流とは、壁に衝突した分子が衝突後、他の分子と衝突しないことである。これにより、壁での情報交換がなされないことになり、温度の不連続などが発生する。
- $M/\sqrt{Re} > 3$ の場合： 自由分子流 (free molecular flow)

となる。ちなみに、自由分子流という仮定での、物体周りの流れの計算(作用する力の計算)は簡単である。

(参考) 希薄気体力学 (rarefied gas dynamics) は、1946年に H.S.Tsien によって始められた。(了)

連続体から希薄流への移行には、以下の分類もある。

- 連続流 $K_n < 10^{-2}$
- 中間流 $10^{-2} < K_n < 10$
- 分子流 $10 < K_n$

この中の中間流と分子流が希薄流である。

11.7 極超音速相似パラメータ

極超音速相似パラメータ (hypersonic similarity parameter) について述べる。結果的には、極超音速流に対する微小擾乱方程式と境界条件が、パラメータ $(M_\infty \delta)^2$ のみを含んだ形で無次元化されることになる。つまり、一様流のマッハ数 M_∞ と物体の厚み比 δ (流れの偏向角と考えてもよい) が個々の場合に違っていても、 $M_\infty \delta$ が同じであれば、それぞれの流れは力学的に相似になる。つまり、変換された変数を用いれば、一つの曲線で表されることになる。これを極超音速相似則 (hypersonic similarity rule) と呼ぶ。

極超音速相似パラメータとして

$$K = M_\infty \delta \quad (11.32)$$

を考える。

M_∞ が非常に大きい場合には、マッハ角 μ は小さくなる。

$$\mu \simeq \sin \mu = \frac{a}{V_\infty} = \frac{1}{M_\infty} \quad (11.33)$$

また、マッハ角 μ は、物体表面の最大傾斜角 θ と同程度かそれ以下になる。

$$\mu \leq \theta \quad (11.34)$$

従って、

$$\frac{1}{M_\infty} \leq \theta \rightarrow \frac{1}{M_\infty \theta} \leq 1 \quad (11.35)$$

となる。

ここで、式 (11.32) の極超音速相似パラメータ K を用いれば、

$$K = M_\infty \theta \geq 1 \quad (11.36)$$

となる。

11.7.1 圧力係数

圧力係数 C_p は、以下のようになる。

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\gamma p_\infty M_\infty^2} = 2\tau^2 \left(\bar{p} - \frac{1}{\gamma M_\infty^2 \tau^2} \right) \quad (11.37)$$

となる。ここで、

$$\bar{p} = \frac{p}{\gamma M_\infty^2 \tau^2 p_\infty} \quad (11.38)$$

である。式 (11.37) を変形し、極超音速相似パラメータ K を使って表すと、

$$C_p = \frac{2M_\infty^2 \tau^2}{M_\infty^2} \left(\bar{p} - \frac{1}{\gamma M_\infty^2 \tau^2} \right) = \frac{2K^2}{M_\infty^2} \left(\bar{p} - \frac{1}{\gamma K^2} \right) \quad (11.39)$$

となる。ちなみに、流れの偏向角 δ と物体の厚み比 τ は、ほぼ同じである。

$$\delta \simeq \tau \quad (11.40)$$

一般に極超音速流においては、物体まわりの圧力分布は、

$$\bar{p} = \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \gamma, M_\infty \tau, \alpha/\tau) \quad (11.41)$$

$$\bar{x} = x/l, \quad \bar{y} = y/l, \quad \bar{z} = z/l \quad (11.42)$$

で表される。従って、この式と式(11.39)から、

$$C_p = K^2 P(K, \xi, \eta) / M_\infty^2 \quad (11.43)$$

と表すことができる。ここで、

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l\delta} \quad (11.44)$$

である。

式(11.43)に基づけば、

$$\frac{C_p}{\tau^2} = P(K), \quad \text{or} \quad \frac{C_p}{\tau^2} = P(K, \gamma), \quad \text{or} \quad \frac{C_p}{\tau^2} = P(K, \gamma, \alpha/\tau) \quad (11.45)$$

となる。

同様に、揚力係数 C_L は

$$\frac{C_L}{\tau^2} = L(K) \quad (11.46)$$

となり、抵抗係数 C_D は、

$$\frac{C_D}{\tau^3} = D(K), \quad \text{or} \quad \frac{C_D}{\tau^3} = D(K, \gamma, \alpha/\tau) \quad (11.47)$$

となる。分母に τ が余計に掛かっているが、これは、遷音速相似のところでも述べたものと同じ理由で、式(8.45)の下で述べられた説明を参照されたい。

以上述べたことから、2つの物体が極超音速流中にあり、それらの断面積分布が軸方向に同じであれば(断面形状が異なってもよい)、この2つの物体は、同じ軸方向圧力分布と同じ抵抗を持つことになる。これを極超音速断面積法則と呼ぶ。

また、2つの物体が相似であるためには、

$$K = M_\infty \tau = \text{const} \quad M_\infty \alpha = \text{const} \quad (11.48)$$

である必要がある。2番目の関係式は、 $K = M_\infty \tau = \text{const}$ と $\alpha/\tau = \text{const}$ を掛けることにより得られる。

例えば、

- 流れ1 : $M_\infty = 3, \alpha = 10^\circ, \tau = 1/3$
- 流れ2 : $M_\infty = 5, \alpha = 6^\circ, \tau = 1/5$

の2つの流れは、どちらも、 $K = 1$ となり、互いに相似となり、 C_p/τ^2 でデータを整理すれば、同じ値をとることになる。

11.7.2 極超音速相似例(斜め衝撃波の場合)

斜め衝撃波を通る流れは以下の関係式がある。

$$M^2 \sin^2 \beta - 1 = \frac{\gamma + 1}{2} M^2 \frac{\sin \beta \sin \theta}{\cos(\beta - \theta)} \quad (11.49)$$

ここで、 β は衝撃波の角度で、 θ は衝撃波通過後の流れの角度である。

極超音速流で、

$$M \gg 1, \quad \theta \ll 1, \quad M\theta \gg 1 \quad (11.50)$$

の場合には、

$$\beta \ll 1 \quad (11.51)$$

となる。この場合をまとめると、

$$\sin \beta \simeq \beta, \quad \sin \theta \simeq \theta, \quad \cos(\beta - \theta) \simeq 1 \quad (11.52)$$

となる。

式 (11.49) を展開して、 $O(\theta^2)$, $O(\beta^2)$ まで考えると、

$$M^2 \beta^2 - 1 = \frac{\gamma + 1}{2} M^2 \beta \theta \quad (11.53)$$

となる。この式を $M^2 \theta^2$ で割ると

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{\gamma + 1}{4} + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 + \frac{1}{(M\theta)^2}} \quad (11.54)$$

となる。ちなみに、 $M \rightarrow \infty$ のときには、 $M\theta \rightarrow \infty$ となり、

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{\gamma + 1}{2} \quad (11.55)$$

となる。

衝撃波前の圧力を p_1 、衝撃波通過後の圧力を p_2 とすると、衝撃波前後での圧力比は、式 (7.85) より、

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M^2 \sin^2 \beta - 1) \simeq \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M^2 \beta^2 - 1) \quad (11.56)$$

となる。

圧力係数 C_p は、一般に、式 (11.37) より

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \frac{p - p_\infty}{p_\infty} \quad (11.57)$$

となり、これを衝撃波前後の圧力変化に適用すれば、式 (11.56) と式 (11.54) を使って、

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2}{\gamma M^2} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M^2 \beta^2 - 1) \quad (11.58)$$

$$= \frac{2}{\gamma M^2} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\gamma + 1}{2} M^2 \beta \theta \quad (11.59)$$

$$= 2\beta\theta \quad (11.60)$$

$$= 2\theta^2 \cdot \frac{\beta}{\theta} \quad (11.61)$$

$$= 2\theta^2 \left[\frac{\gamma + 1}{4} + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 + \frac{1}{(M\theta)^2}} \right] \quad (11.62)$$

となる。

これを見ると、

$$C_p = \theta^2 f(M\theta, \gamma) \quad (11.63)$$

となっていることが分かる。つまり

$$\frac{C_p}{\theta^2} = f(M\theta, \gamma) = f(K, \gamma) \quad (11.64)$$

である。極超音速相似則である式 (11.45) が斜め衝撃波を過ぎた流れに対して成立していることが確認できる。ちなみに、 $\theta = \delta$ である。

11.7.3 極超音速相似例 (Prandtl-Meyer 膨張流の場合)

特性曲線の関係式より、式 (9.115) と式 (9.121) において、流れの偏向角 θ は、

$$\begin{aligned}\theta &= -(\omega(M) - \omega(M_\infty)) \\ &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \sqrt{M_\infty^2 - 1} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \sqrt{M^2 - 1} \right) \\ &\quad - (\tan^{-1} \sqrt{M_\infty^2 - 1} - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1})\end{aligned}\quad (11.65)$$

となる。ここで、 M_∞ は角をまわる前の流れのマッハ数で、 M はプラントルマイヤー膨張をした後の、角を過ぎた流れである。

M_∞ が大きくなると、 M も大きくなり、

$$\sqrt{M^2 - 1} \simeq M \quad (11.66)$$

と近似できる。また、引数 x が大きい場合 ($x \gg 1$)、 $\tan^{-1} x$ の漸近展開は

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \dots \quad (11.67)$$

となる。その結果、式 (11.65) は、

$$\theta = \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{M_\infty} \right) \quad (11.68)$$

と簡略化される。あるいは、この式に $(\gamma-1)/2 \times M_\infty$ を掛けると

$$\frac{M_\infty}{M} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty \theta \quad (11.69)$$

となる。

圧力係数は、

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho V_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \quad (11.70)$$

で定義されるので、これに圧力比 p/p_∞ の式を代入する。等エントロピー流の関係式である

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (11.71)$$

を用いれば、 C_p は

$$\begin{aligned}C_p &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_0} \times \frac{p_0}{p_\infty} - 1 \right) \\ &= \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[\frac{2 + (\gamma-1)M_\infty^2}{2 + (\gamma-1)M^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right\}\end{aligned}\quad (11.72)$$

となる。 M , M_∞ が大きい場合には

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\left(\frac{M_\infty}{M} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right] \quad (11.73)$$

となる。式 (11.69) を代入すると

$$C_p M_\infty^2 = \frac{2}{\gamma} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty \theta \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right] \quad (11.74)$$

となる。この式の両辺を $M_\infty^2 \theta^2$ で割ると

$$\frac{C_p}{\theta^2} = \frac{2}{\gamma} \cdot \frac{1}{M_\infty^2 \theta^2} \left[\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \theta^2 \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right] \quad (11.75)$$

となる。従って、

$$\frac{C_p}{\theta^2} = f(M_\infty \theta, \gamma) = f(K, \gamma) \quad (11.76)$$

となり、これは、極超音速相似則の関係式 (11.45) を満たしている。つまり、このような膨張流に対しても、極超音速相似則は成立する。

11.8 Newton 近似

これは、マッハ数が大きい場合の流れに対する圧力分布を求める近似的な方法である。極超音速の機体を設計するときには、この方法を用いて、機体まわりのおおよその圧力分布を予測する。大変便利な方法である。

ニュートン近似の概念は、物体に衝突した流体は、衝突後は物体に沿って流れるというものである。このような流れをニュートン流と呼ぶ (Newtonian Flow)。ニュートン理論は、衝撃波が物体表面に付着した極限 ($M_\infty \rightarrow \infty$) の場合に相当し、一様流の当たらない面 (例えばベース面) では真空になる。

もっと具体的に言えば、流れを粒子のように考え、一様流の気体粒子がそのまま物体表面に衝突し、そこで粒子の持っていた一様流の運動量の表面に垂直方向の成分を失い、その分が、表面に圧力として作用するというものである。ちなみに、この方法は、流れの解析のために、ニュートンが 1687 年に彼の著書 Principia の中で提案したものである。この理論 (Newtonian Flow Theory) は、ほとんどの流れには適用できないが、唯一、この極超音速流の場合には、適用が可能となる。

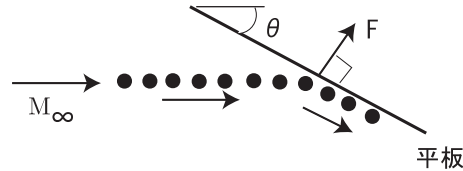


図 11.2: ニュートン流れに基づく迎角を持つ平板に沿う流れ

一様流に対して、 θ で傾いている表面に対して、一様流の、表面に垂直な質量流束 (mass flux) は、

$$M_n = \rho_\infty V_\infty \sin \theta \quad (11.77)$$

となる。これは、単位時間・単位面積当たりの質量流量である。

この結果、運動量損失は、

$$\Delta(mV_n) = \rho_\infty V_\infty \sin \theta \times V_\infty \sin \theta = \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \theta \quad (11.78)$$

となる。この分が、壁に当たって消失することになる。

運動量の釣り合い式から、運動量の損失分が圧力上昇になる。

$$p - p_\infty = \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \theta \quad (11.79)$$

圧力係数に変換すると

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2} = 2 \sin^2 \theta \quad (11.80)$$

になる。大変簡単な式で、これを Newton のサイン 2 乗則と呼ぶ。

この式は明らかにマッハ数に依存していないので、マッハ数独立則 (Mach number independent principle) と呼ぶ。実際、マッハ数を上げて抵抗係数などを調べると、極超音速に近付くと、抵抗係数はマッハ数に依存しなくなる。この C_p を物体表面に沿って積分すれば、揚力、抗力、モーメントが得られる。

11.8.1 修正ニュートン近似

鈍頭物体では、式 (11.80) の係数 2 の代わりに、実験値など実際に近い値を使う Lees による修正ニュートン近似がよく使われる。

$$C_p = C_{p_{max}} \sin^2 \theta \quad (11.81)$$

ここで、 $C_{p_{max}}$ は、鈍頭物体での最大圧力係数、あるいは澱み点での圧力係数である。

$$C_{p_{max}} = \frac{p_{02} - p_\infty}{(1/2)\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_{02}}{p_\infty} - 1 \right) \quad (11.82)$$

ここで、 p_{02} は、垂直衝撃波を通過した後の流れの総圧 (ピトー圧) である。

これに関連して、ピトー圧を求める、レーリーのピトー管公式 (Rayleigh Pitot tube formula) がある。垂直衝撃波を過ぎた後の総圧 p_{02} は

$$\frac{p_{02}}{p_\infty} = \left\{ \frac{(\gamma + 1)^2 M_\infty^2}{4\gamma M_\infty^2 - 2(\gamma - 1)} \right\}^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{1 - \gamma + 2\gamma M_\infty^2}{\gamma + 1} \right) \quad (11.83)$$

となる。

従って、 p_{02} に対する圧力係数は、式 (11.82)、式 (11.83) を用いて、

$$C_{p_{max}} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\left[\frac{(\gamma + 1)^2 M_\infty^2}{4\gamma M_\infty^2 - 2(\gamma - 1)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{1 - \gamma + 2\gamma M_\infty^2}{\gamma + 1} \right] - 1 \right) \quad (11.84)$$

となる。

ここで、マッハ数を $M_\infty \rightarrow \infty$ にすると、

$$C_{p_{max}} \rightarrow \left[\frac{(\gamma + 1)^2}{4\gamma} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \times \frac{4}{\gamma + 1} \quad (11.85)$$

となる。従って、

$$C_{p_{max}} \rightarrow 1.839 \quad \text{for } \gamma = 1.4 \quad (11.86)$$

$$C_{p_{max}} \rightarrow 2.0 \quad \text{for } \gamma = 1.0 \quad (11.87)$$

となる。ここで、後者の場合は、式 (11.80) から分かるように、ニュートン法の結果と同じになる。つまり、ニュートン法は $\gamma = 1$ のガスを扱っていることになる。

$\gamma \rightarrow 1$ になるのは、分子の質量 M が大きいガスである。理由は、

$$\gamma = C_p/C_v, \quad C_p = C_v + R = C_v + \frac{R_0}{M} \quad (11.88)$$

である。ここで、 R_0 は、一般ガス定数である。 M が大きくなれば、 R_0/M が小さくなり、その結果、 γ は 1 に近づく。

11.8.2 適用例（迎角を持つ平板の場合）

長さ l で、迎角 α を持つ 2 次元平板に働く力を考える。

揚力係数は、式 (11.80) を用いて、

$$C_L = \int_0^l C_p \cos \alpha \frac{ds}{l} = \int_0^l 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \frac{ds}{l} = 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (11.89)$$

となる。ここで、下面だけが計算されている。上面は、一様流の影となり、ニュートン流では圧力が 0 となる（真空となる）。

迎角 α が小さい場合には、近似として、

$$C_L \simeq 2 \sin^2 \alpha \quad (11.90)$$

となる。

同様に、抵抗係数は

$$C_D = \int_0^l C_p \sin \alpha \frac{ds}{l} = \int_0^l 2 \sin^2 \alpha \sin \alpha \frac{ds}{l} = 2 \sin^3 \alpha \quad (11.91)$$

となる。

ちなみに、揚抗比 (lift-to-drag ratio) L/D は、

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (11.92)$$

となる。超音速流の場合と同じで、迎角が小さいほど揚抗比は良くなる。

極超音速流では、弾道係数 (ballistic coefficient) も大事なパラメータとなる。弾道係数は、

$$C_B = \frac{W}{C_D A} \quad (11.93)$$

で表される。ここで、 W は重量 (kN)、 C_D は抵抗係数、 A は基準面積 (m^2) である。弾道係数が大きいほど遠くまで飛んでいく。

- 有翼飛翔体では、 $2.0 < L/D < 3.0$ 、 $12.5 < C_B < 20.0$
- Bionics では、 $1.0 < L/D < 1.5$ 、 $6.0 < C_B < 10.0$
- 球頭円錐では、 $0 < L/D < 0.8$ 、 $2.5 < C_B < 6.0$

(参考) スペースシャトルの揚抗比は、 $L/D = 4$ 程度と言われている。スペースシャトルは、翼を付けて、ある程度の揚抗比を持つことにより、大気を活用でき、空気力を利用して、より良く軌道を変えることができる。これを一般に cross range を大きくすると言う。一方、旅客機のように遠くまで飛んでいけるようにするのを down range を大きくすると言う。(了)

11.9 平板前縁での流れの干渉

極超音速流中に平板を置いた実験では、シュリーレン写真を見ると、前縁から衝撃波が発生している。これは、平板上に発生する境界層の影響である。平板はフラットであるが、境界層が出来ると、排除厚さの分だけ、平板の形状は外側に突き出た形状になり、その結果、前縁が実質的に勾配を持つようになり、流れを押し出すため、衝撃波が発生する。

一般的に極超音速流中に置かれた平板の平板境界層内では、温度が上がるために密度が小さくなり、その結果、境界層の厚さは増大する。

極超音速流の主流と平板境界層の干渉（特に平板の前縁付近の干渉）は、パラメータ χ を使って表す事が出来る。前縁付近では、強い干渉（strong interaction）が、少し下流に行った辺りの、境界層と衝撃波がはっきりと分離できる領域から、弱い干渉（weak interaction）が現れる。この弱い干渉が終了した後で、境界層本来の Prandtl の境界層が発達することになる。

強い干渉領域と弱い緩衝領域における圧力分布が理論的に解析されている。

- 強い干渉領域： 前縁近くでは、衝撃波が壁近くにあるために、衝撃波と粘性層が強く干渉している。 $Pr = 1, \gamma = 1.4$ に対して、

$$\frac{p}{p_\infty} = 0.514\bar{\chi} + 0.759 \quad (11.94)$$

となる。ただし

$$\bar{\chi} = M_\infty^3 \frac{\sqrt{C}}{Re_x}, \quad C = \frac{\mu_{wall}/\mu_\infty}{T_\infty/T_{wall}} \quad (11.95)$$

- 弱い干渉領域： 前縁から少し下流に行くと、衝撃波が壁から離れて、境界層との干渉が弱くなる。 $Pr = 0.725, \gamma = 1.4$ に対して、

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 + 0.31\bar{\chi} + 0.050\bar{\chi}^2 \quad (11.96)$$

となる。

ちなみに、平板の先端付近では、スリップ流れが存在する。つまり、流れの速度が速いために、十分な分子同士の衝突が行われることなく、壁での影響を受けないまま（壁との情報交換が行われないまま）平板上を流れすぎてしまう現象である。ここでは、ナビエストークス方程式のような連続体の方程式が適用できなく、ボルツマン方程式のような気体分子運動方程式を適用する必要がある。ボルツマン方程式は、簡単には、モンテカルロ法 (DSMC 法: Direct Simulation Monte Carlo Method) で解くことができる。

(参考) DSMC 法に関しては、以下の本

G.A.Bird: Molecular Gas Dynamics, Clarendon Press, Oxford, 1976

を参照されたい。

(参考終わり)

これに関連して、スペースシャトルでは、300,000ft(92km) 以上上空では、シャトルのノーズ付近の流れを純粋な連続体の方程式では、うまく解くことができない。

11.9.1 極超音速粘性干渉

この場合の干渉とは、粘性境界層が発達すると、外側の流れ（非粘性流）が変更される。これが変化すると、また境界層の中の流れが変化するという仕組みである。

極超音速流には、2つの大きな干渉がある。

- 圧力干渉： 極超音速流の状態では、境界層が異常に厚くなる。これを粘性干渉と呼ぶ。

- 衝撃波と境界層との干渉： 強い衝撃波が境界層の中に突入する (shock impinging)。この結果、衝撃波の後ろで境界層が厚くなる。また、衝撃波の突入部で境界層が剥離する。

平板における層流境界層の場合、境界層厚さ δ は、

$$\delta \propto \frac{M_e^2}{\sqrt{Re_x}} \quad (11.97)$$

となる。つまり、 Re_x が同じであれば、境界層の厚さは、 M_e^2 に比例する。この証明は、以下の通りである。層流境界層の中では、自己相似解として、

$$\delta \propto \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad (11.98)$$

となる。境界層の中では、強い粘性散逸があるので (温度の上昇につながる) 温度分布は境界層の中で大きく変化する。その結果、密度や粘性係数は、境界層の中で大きく変化する。壁上での密度 ρ_w と μ_w を用いると、

$$\delta \propto \frac{x}{\sqrt{\frac{\rho_w u_e x}{\mu_w}}} \propto \frac{x}{\sqrt{\frac{\rho_e u_e x}{\mu_e}}} \sqrt{\frac{\rho_e}{\rho_w}} \sqrt{\frac{\mu_w}{\mu_e}} \quad (11.99)$$

となる。

境界層の中では、壁に垂直方向に圧力が一定であるので、

$$p_e = p_w = p \quad (11.100)$$

となる。また、状態方程式より

$$\frac{\rho_e}{\rho_w} = \frac{p_e}{p_w} \frac{T_w}{T_e} = \frac{T_w}{T_e} \quad (11.101)$$

となる。ここで、境界層より、 $p_e/p_w = 1$ である。また、粘性係数が温度に比例すると考えると、

$$\frac{\mu_w}{\mu_e} = \frac{T_w}{T_e} \quad (11.102)$$

となる。

以上より、境界層の厚さは、

$$\delta \propto \frac{x}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{T_w}{T_e}} \sqrt{\frac{T_w}{T_e}} \propto \frac{x}{\sqrt{Re}} \cdot \frac{T_w}{T_e} \quad (11.103)$$

となる。ここで、 Re は、境界層外縁での値に基づいている。

$$Re = \frac{\rho_e u_e x}{\mu_e} \quad (11.104)$$

断熱壁を仮定すると (回復係数は $r = 1$)、

$$\frac{T_w}{T_e} = \frac{T_{aw}}{T_e} = \frac{T_0}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Me^2 \simeq \frac{\gamma - 1}{2} Me^2 \quad (11.105)$$

となる。最後の関係式は、境界層外縁でのマッハ数が大きい ($Me \gg 1$) として近似している。この式を式 (11.103) に代入すると、

$$\delta \propto \frac{x}{\sqrt{Re}} Me^2 \implies \frac{\delta}{x} \propto \frac{Me^2}{\sqrt{Re}} \quad (11.106)$$

となる。

11.10 澱点空力加熱率

澱み点空力加熱率は、Fay and Riddle(1958) によって解析されている。この式は、空力加熱率分布を実験データや計算結果と比較するときに参考としてよく使われる。Fay and Riddle による澱み点での空力加熱率 q_{st} は、

$$q_{st} = \frac{0.76}{(Pr)^{0.6}} (\rho_{t2} \mu_{t2})^{0.4} (\rho_w \mu_w)^{0.1} \left[1 + (Le^{0.52} - 1) \frac{h_d}{h_{t2}} \right] (h_{t2} - h_w) \sqrt{\left(\frac{du_e}{dx} \right)_{st}} \quad (11.107)$$

となる。ここで、 Pr はプラントル数で、 ρ_{t2}, μ_{t2} は物体前方に発生する衝撃波 (bow shock) を通過した後の流れを、澱ませた状態 (境界層外縁での澱み状態) での密度と粘性係数である。(ここでは、物体表面近傍に境界層が存在し、その境界層の外側に外部流が存在すると考える。これに関連して粘性流体のテキストの澱点流れを参照されたい) また、 ρ_w, μ_w は、境界層外縁での澱み状態から境界層に垂直に境界層を横断し、壁面に達したときの (壁上) での密度および粘性係数である。さらに、 Le はルイス数 (Lewis number) で、その定義は、

$$Le = \frac{\rho D_i C_p}{k} \quad (11.108)$$

となる。つまり、拡散係数 D_i と温度拡散係数 $k/(\rho C_p)$ の比である。その他、 h_d は原子の解離エネルギーに原子の質量比 (mass fraction) を掛けたもので、境界層外縁で計算される。

$$h_d = C_O h'_O + C_N h'_N \quad (11.109)$$

ここで、 C_O, N_O は質量比で、 h'_O, h'_N は原子の解離エネルギーである。解離していない流れを扱うときには、式 (11.107) で $h_d = 0$ とすればよく、式が簡単化される。

澱点における (厳密には壁付近の粘性層の外側) 非粘性流れの、壁に沿う方向 (x 方向) の流れの速度勾配 (主流の速度勾配) は

$$\left(\frac{du_e}{dx} \right)_{st} = \frac{1}{R_b} \sqrt{\frac{2(p_{t2} - p_\infty)}{\rho_{t2}}} \quad (11.110)$$

となる。ここで、 $()_\infty$ は一様流での値、 $()_e$ は境界層の外側の値で、 R_b は先端部の曲率半径である。この式を式 (11.107) に代入すると、

$$q_{st} \propto \frac{1}{\sqrt{R_b}} \quad (11.111)$$

であることが分かる。つまり、澱点での熱流束は、曲率半径の平方根に反比例する。熱の進入を防ぐには曲率半径を大きくした方がよい。このようなことから、スペースシャトルのような極超音速機の翼の前縁半径は大きくなっている。

ちなみに、スペースシャトルが大気圏に再突入するときの機首での空力加熱率は、 $q = 42W/cm^2$ である。また、再突入する速度は、 $7.5km/sec$ である。

参考

J.A.Fay and F.R.Riddell: Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air, Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 25, No. 2, Feb. 1958, pp. 73-85.

11.11 球頭周りの熱流束分布

球頭まわりの熱流束分布は、Lees(1956) によって解析されている。

球頭表面に沿う熱流束 q_w は

$$\frac{q_w}{q_0} = \frac{(1/2)\theta \sin \theta [\cos^2 \theta + (1/\gamma_\infty M_\infty^2) \sin^2 \theta]}{\left\{ \int_0^\theta \theta \sin^2 \theta [\cos^2 \theta + (1/\gamma_\infty M_\infty^2) \sin^2 \theta] d\theta \right\}^{1/2}} \quad (11.112)$$

となる。ここで、 θ は球頭子午面内で球頭表面に沿う位置を表す角度である ($\theta = 0$ は球頭先端部の澱点である)。また、 q_0 は球頭先端部での熱流束である。

11.12 衝撃波干渉

衝撃波に関する干渉には、衝撃波・衝撃波干渉 (shock/shock interaction) と衝撃波・境界層干渉 (shock/boundary layer interaction) がある。前者は 2 つの衝撃波が干渉するもので、後者は衝撃波が境界層に突入し、諸量の変化をもたらすものである。

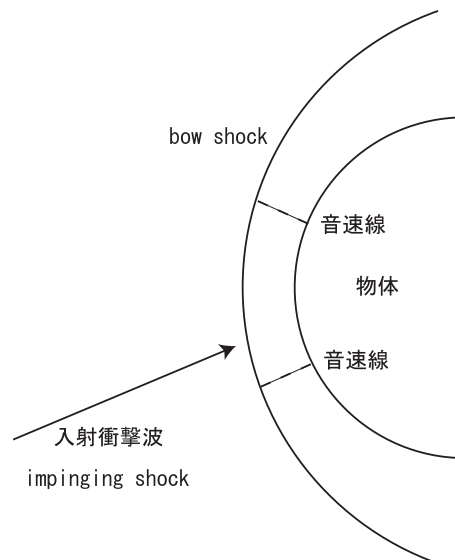


図 11.3: 衝撃波・衝撃波干渉

11.12.1 衝撃波・衝撃波干渉

極超音速流では、衝撃波・衝撃波干渉が重要となる。衝撃波・衝撃波干渉が起こると、圧力とともに空力加熱率も増大する。この現象を詳細に調べてたのが、B.Edney(1968)で、楔 (wedge) から発生する衝撃波を半円柱に当てて、その時発生する衝撃波・衝撃波干渉パターンを調べた。楔からの入射衝撃波の円柱表面への位置 (impinging point) により、そのパターンはタイプ 1 からタイプ 6 までの 6 種類のに分類される (円柱前面に形成される bow shock の最も下側に衝突した場合にはタイプ 1、最も上側に衝突した場合にはタイプ 6 である)。タイプ 3 とタイプ 4 は上下の音速線 (sonic line) の間に向かって入射される場合で、このとき円柱上の圧力や加熱率が大きく増大する。

(参考) B. Edny: Anomalous Heat Transfer and Pressure Distributions on Blunt Bodies at Hypersonic Speeds in the Presence of an Impinging Shock, FFA Report 115, 1968.

(参考終わり)

半球円柱に衝撃波が突入した場合の衝撃波・衝撃波干渉では、物体表面での最大圧力が stagnation 圧力の約 8 倍 ($p/p_{st} \simeq 8$) に、最大空力加熱率が約 16 倍 ($q/q_{st} \simeq 16$) になるという報告がある (L.W.Keyes and F.D.Hains, NASA TN D-7139, 1973)。

11.12.2 衝撃波・境界層干渉

衝撃波が境界層に突入し、物体表面上の圧力や熱流束を上昇させる現象である。圧力上昇と熱流束の上昇には相関がある。平板上の経験式の一例は以下のようである。

- 上流側干渉部までの境界層が層流の場合：

$$\frac{h_p}{h_\infty} = \left(\frac{p_p}{p_\infty} \right)^{1.3} \quad (11.113)$$

- 上流側干渉部までの境界層が乱流の場合：

$$\frac{h_p}{h_\infty} = \left(\frac{p_p}{p_\infty} \right)^{0.85} \quad (11.114)$$

ここで、 h は熱伝達係数で、添え字 p はピーク値である。この式を見ると、同じ圧力上昇に対して、層流の方が、より大きな熱伝達となる。

11.13 大気圏外への飛行

通常大気圏外に出るためには、多段式のロケットを使用する。おおよそ地上から高度 80km を境にして、それ以下は、連続体の流れ方程式で記述できる。それより上空では、希薄流 (rarefied gas) として流れを扱い、そこではクヌーセン数 (K_n : Knudsen number) がパラメータとなる。クヌーセン数の定義は、分子の衝突の平均自由行程 / 物体の代表長さである。従って、クヌーセン数が大きいほど希薄度が大きいことになる。

ロケットで上空に打ち上げた場合、高度 80km ぐらいで、速度は 2km/s に到達する。さらにそこから加速して、上空 200km ぐらいで速度が 4km/s となる。通常、その後は、高度は 200km に維持して、さらに加速して速度を 8km/s 弱にもっていく。

シャトルで帰還するときには、高度 200km から高度を落として高度 100km までは、速度は一定に維持して、8km/s 弱である。その後、速度を落として、高度 80km ぐらいで速度は 7.5km/s、このとき、マッハ数は $M=25$ である。さらに高度を落として、高度 65km ぐらいでは、速度は 4.8km/s で、マッハ数は $M=15$ である。さらに高度を落として、高度 45km ぐらいでは、速度は 1.6km/s 程度で、マッハ数は $M=5$ となる。

11.14 輻射

衝撃層 (shock layer radiation) の輻射 (radiation) は、スペースシャトルのような、大気圏への突入速度が小さい (7.5km/s) 宇宙機では重要ではない。また、Genesis や Stardust のような、高速ではあるが、サイズが小さい宇宙機でも、重要ではない。これに対して、Orion のような、大きく

て、速度がある宇宙機では、衝撃層の放射現象は重要となる。火星から戻って来るときの熱流束は、月から戻って来るときの、約 5 倍となる。理由は、熱流束の主たるモードが、対流から放射に変化するためである。