流　体　力　学　入　門

名古屋大学大学院工学研究科
航空宇宙工学専攻
流体力学講座

２０００年3月１日

序言

流体力学は大変奥の深い学問であり、また、古い学問でもある。基本は既に確立していると言えるが、現在でもさらに細かい現象を調べるために活発な研究がなされている。流体力学は熱の問題とも密接に関係しており、自然界で多々観察されるのと同時に、流体機械などに幅広く応用されている。また、流体力学は低速流から高速流までそのカバーする速度領域は広い。そこではまったく違う性質の流れが現れる。さらに層流と乱流の問題がある。実際の流れのほとんどが乱流であるため、今まで多くの人が乱流を研究してきた。それにより、かなりの特性が解明されているが、完全には分かったとは言えない。流体力学の支配方程式であるナビエ・ストークスの方程式を解くのが難しいのは、それが非線形項を含むからである。ちなみに、この非線形項から乱流も生じてくる。最近では、乱流のみならず、混相流、燃焼流、空力音など複雑な流れも研究されている。これらの解析には、最近確立されつつある CFD(Computational Fluid Dynamics、数値流体力学) が威力を発揮している。 ここでは、流体力学の基礎についてその要点を述べる。

名古屋大学工学研究科航空宇宙工学専攻
流体力学研究室　教授　中村佳朗
２０００年3月１日

目　次

第1章　流体力学の基礎事項

ここでは流体力学の基本的な事柄について簡単に述べる。

1.1　物質の３態

物質には気体、液体、固体の３態がある。

- 気体 (gas)：　不規則な分子運動を行う。分子間の距離が相対的に長いので、分子同士が離れている場合に働く引力や、近づいた場合に働く斥力は通常無視できる。気体は液体に比べて分子間の力が弱いので、外部から力を受けると容易に体積を変化させる。
- 液体 (liquid)：　分子の集合状態がかなり密である。気体ほど不規則ではなく、近い距離にある分子同士は、おおよその配列を保ちながら比較的大きい分子運動をする。また、液体は表面を作る。そこでは、その表面を最小にしようとする表面張力 (surface tension) が発生する。
- 固体 (solid)：　分子の集合状態が規則的で、分子間の力が強く作用している。分子は決まった位置の周りを微小な振動をしているだけで、激しい分子運動をしない。

1.1.1　体積変化

例えば、圧力を２倍に上げると、これら３態の体積は、それぞれ、

- 気体では、1/2（等温状態の場合）
- 液体では、$5 \sim 15 \times 10^{-5}$
- 固体では、$1 \sim 30 \times 10^{-6}$

ほど縮小する。

ちなみに、水の相変化に伴う体積変化は

- 水から氷になるとき：　約 9% の体積増加 (発熱、exothermic)
- 水から水蒸気になるとき：　体積は約 1672 倍 (吸熱、endothermic)

1.1.2　圧縮性と非圧縮性

- 圧縮性 (compressibility): 圧力を受けたときに体積が減少する性質
- 非圧縮性 (incompressibility): 圧力による体積変化がない。つまり、密度 (ρ) ＝一定

1.2　流体を記述する基本物理量

流体の状態は、密度 (ρ)、圧力 (p)、温度 (T) により決定される。

- 密度 (ρ : *density*): 単位体積当りの質量 (kg/m^3)。ちなみに、単位体積当りの重量は比重量 ($\gamma = \rho g$) である。流れ場の密度分布を測定することは困難である。高速流の場合のように密度変化が生じる場合には、光計測で密度を測定できる。これには干渉計 (Interferometer) を使用する。写真の中に明暗のフリンジが現れ、これを勘定すると各位置での密度そのものが求められる。ちなみに、定量的なことは得られないが、密度の一回微分の分布が得られるのはシュリーレン法 (Schlieren) であり、２回微分の分布が分かるのはシャドウグラフ法 (Shadowgraph) である。
- 圧力 (p: pressure): 分子の運動量の大きさ (N/m^2)。流体中の単位面積当りに働く力を圧力と呼ぶ。ある点での圧力は、その点を含む任意の面 (圧力が掛かる面）の方向には依存しない。つまり、等方的である。
  - 静圧 (static pressure)：流体が流れている状態で持っている圧力。ちなみに、大気圧からの差圧をゲージ圧と呼ぶ。
  - 動圧 ($q = (1/2)\rho V^2$: dynamic pressure): 流れの運動エネルギに相当する。動圧が大きいと物体に大きな空気力が作用する。逆に、密度の小さい所では動圧は小さい。
- 温度 T(temperature): 分子の運動エネルギーを表す。熱さや冷たさの尺度である。気体では温度を上げると膨張する。つまり、体積を増加させる。
  - $0°C$: 標準気圧 (1013mb=1.013b=760mmHg) の下で氷が融解する温度
  - $100°C$: 標準気圧で純粋な水が沸騰する温度。これらの $0°C$ と $100°C$ の間を 100 等分して、$1°C$ 目盛とする。これを摂氏目盛 (centigrade あるいは celsius) と呼ぶ。
  - 温度の換算
    * 絶対温度 $T_K = 273.16 + T_c$ (単位：ケルビン K)
    * 華氏温度 $T_F = (9/5)T_C + 32$ (単位：ファーレンハイト F)
    * ランキン温度 $T_R = T_F + 459.69$ (単位：ランキン R)

    ちなみに、流れている気体の温度（静的な温度）を測るのは困難である。

1.3　地球大気の特性量

地球のまわりには、地球の境界層である大気が存在している。地球の大気 (atmosphere) は、窒素 (N_2) が 78%、酸素 (O_2) が 21%、アルゴン (Ar) が 1%、二酸化炭素 (CO_2) が 0.35% からなる。

大気は高度とともに以下のように変化する。

高度 $z(m)$	温度 $T(°C)$	気圧 $p(mmHg)$	密度$\rho(kg/m^3)$
0	15	760	1.2250
10,000	-49.9	198.8	0.41351
20,000	-56.5	41.5	0.088910
30,000	-46.4	9.0	0.018410
50,000	-2.5	0.598	1.03×10^{-3}
80,000	-92.50	7.78×10^{-3}	2×10^{-5}
100,000	-63.1	2.26×10^{-4}	4.97×10^{-7}

1.3.1　地球大気圏の区分

地球大気はいくつかの領域に分けられる。

- 対流圏：　$z < 10 \sim 15km$。種々の気象現象が起き、高度とともに温度が下がる。
- 成層圏：　$10km < z < 50km$。温度がほぼ一定の後、最高値まで到達。
- 中間圏：　$50km < z < 80km$
- 熱圏：　中間層よりも上の部分の総称。温度は高度とともに上昇。太陽紫外線を吸収して高温となり、大気は電離した状態にある。
  - 電離圏:　$80km < z < 400km$　熱圏の下部で、電子とイオンが最も多く存在する。
  - 磁気圏：　$z < 10,000km$。大気が極めて希薄。電離した大気粒子は電子やプロトンとして地球磁場により強く捕らえられている。

ちなみに、スペースシャトルは、高度 $185 \sim 400km$ の円軌道を、また、静止衛星は、高度 $35,786km$ の円軌道を回っている。

1.3.2　他の惑星の大気

- 火星：　火星大気は $5.5mb$。ほとんど二酸化炭素 ($CO_2 95\%$, $N_2 3\%$, $Ar 1.6\%$)。温度は地球より $20°C$ ぐらい低く、夏には $10 \sim 20°C$ に達する。火星では強い風が吹いている。
- 木星：　大気の主成分は水素 (H_2) とヘリウム (He) である。

1.4　状態方程式

密度 (ρ)、圧力 (p)、温度 (T) のうちどれか一つの熱力学量が決定されれば、他の二つの量は決定される。これを関係付けるのが状態方程式である。

1.4.1　密度が低い場合

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{1.1}$$

これは気体分子運動論による理想モデルである。これを理想気体 (ideal gas) と呼ぶ。R はガス定数 (gas constant, 単位質量当り) で, これに分子量 M を掛けると一般ガス定数 R_0 となる。

$$R_0 = MR = 8314.4(m^2/s^2/K) = 1.986(cal/K/mol) \tag{1.2}$$

気体定数 R_0 をアボガドロ数 $N = (6.022 \times 10^{23})$ で割ると、ボルツマン定数 k になる。ボルツマン定数とは、分子1個当りの気体定数である。

$$k = \frac{R_0}{N} = 1.38066 \times 10^{-23}(J/K) \tag{1.3}$$

1.4.2　実在気体の状態方程式

圧力を高めたときに、気体の状態は理想気体からずれてくる。ずれの原因として、

- 分子自身が大きさを持つこと。
- 分子間の相互作用があること。

これを考慮して、ファン・デル・ワールス (Van der Waals) は、1873年に半経験式を提案した。

$$(p + a\rho^2)\left(\frac{1}{\rho} - b\right) = RT \tag{1.4}$$

a: 分子間相互作用効果を表す定数 (分子間力に対する補正)
b: 体積効果を表す定数 (分子自身の体積に対する補正)

ちなみに、窒素 N_2 では、$a = 1.35,\ b = 38.8$、また、酸素 O_2 では、$a = 1.36,\ b = 31.9$ である。

この式は実在気体の理想気体からのずれをある程度まで説明できるが、やはり、低圧領域でしか使えず、適用範囲はそんなに広くない。

1.4.3　定密度流体

液体でも状態方程式が考えられるが、非常に複雑になる。そこで、液体では

$$\rho = 一定 \tag{1.5}$$

が使われる。正確には定密度流体 (isopicnic fluid) と呼ばれる。これには、

- 非圧縮性：　圧力に対する体積の変化がない
- 非膨張性：　温度に対する体積の変化がない

の 2 つの性質がある。

1.4.4　理想気体

理想気体 (ideal gas) とは

- 理想気体は現実には存在しない。
- 低圧では、個々の物質の違いは気体としての基本的な性質に影響を及ぼさない。
- 分子間の距離が大きく、分子間力がほとんど無視できる。

1.4.5　完全ガス

完全ガスとは

- 状態方程式として理想気体の方程式を使用する。これを熱的完全ガスと呼ぶ。
- 比熱（等圧比熱 C_p と等積比熱 C_v）が一定で、内部エネルギーが絶対温度に比例する。これを熱量的完全ガスと呼ぶ。

1.5　流体の運動を記述するための物理量

- 位置 ($\vec{r}$)：　点 P の位置は座標で表される。座標としては、デカルト座標 (x,y,z), 円柱座標 (r,θ,z), 球座標 (r,θ,ϕ), 一般座標 (ξ,η,ζ) などがある。各座標に沿う実際の長さの単位は (m) である。
- 速度 ($\vec{v}$)：流体の要素が各瞬間に占める位置が単位時間に変化する割合である。ある流体要素を意識して、それが運動していく途中での速度を考えるよりは、空間分布を重視して、ある点 $P(x,y,z)$ における流体の速度 (u,v,w) を用いた方が便利である。この表し方を Euler 表示と呼ぶ。
- 流線 (streamline)： ある時刻での速度ベクトルの分布を空間に描き、それらの速度ベクトルの接線を結んでできる曲線。定義は

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{u}{V},\quad \frac{\partial y}{\partial s}=\frac{v}{V},\quad \frac{\partial z}{\partial s}=\frac{w}{V} \tag{1.6}$$

  ここで、s は流線に沿う長さで、V は速度の大きさ $(V^2=u^2+v^2+w^2)$ である。

- 流管 (stream tube): 流線に取り囲まれた管。管の側壁を流線が突き抜けない。

流線や流管は定常流では変化しないが、非定常流では時間とともに変わる。

1.6　流体要素の変形

流体が一様に流れていれば速度場は歪まないが、一様でなくなったときに、速度場に歪みが生じる。この歪みが生じると、一般的にはそこに応力が発生する。

1.6.1　速度歪み

点 $P(x,y)$ での x 方向速度成分 u を考える。そこから少し離れた点 $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ では、速度の変化 δu が

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y \tag{1.7}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta y - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y \tag{1.8}$$

と表される。ここで、右辺の各項は以下のものを意味する。

- 第 1 項：　単位時間当りの伸びの割合
- 第 2 項：　せん断変形
- 第 3 項：　回転

速度分布の歪みとして、$\alpha = \partial v/\partial x,\ \ \beta = \partial u/\partial y$ が存在するとき、その内で、$(\alpha+\beta)/2$ が純粋なせん断変形で、$(\alpha-\beta)/2$ が回転である。せん断と回転は別の種類の変形で、せん断には粘性応力が生じるが、回転には生じない。なお、粘性応力は、伸びやせん断変形などの速度分布の歪みに比例する。この比例定数が粘性係数 μ である。これを無次元したときに現れるパラメータがレイノルズ数 (Reynolds number) である。レイノルズ数が大きくなると流れは乱流になる。

1.7　流体運動の記述の仕方

- ラグランジェ(Lagrange) の方法：　ある時刻にある場所にあった流体粒子の動きを時々刻々追跡していく方法である。加速度の項の記述は簡単になる。欠点は流体中での空間勾配が複雑になることである。
- オイラー (Euler) の方法：　空間中の点 P での速度や圧力を空間および時間の関数として求める。諸量の空間的な分布図を与える。加速度の項が複雑になり、非線型項が生じる。流れの解析では、通常はこの方法を使用する。

1.8　可視化における流体要素の軌跡

流れ場を可視化するのは、流れの理解に役立ち、近年盛んに行われている。最新のレーザーを用いた可視化実験はかなりの成果をあげているが、その一方で、数値計算結果をコンピュータで処理したコンピュータグラフィックスも見ごたえがあり、得られる情報が豊富である。このようなときに使用される可能性のある流体の軌跡として

- 道筋 (path): 一つの流体要素が通った道筋
- 流線 (streamline): 速度ベクトルの接線（非定常流れ場では時間とともに変わる）
- 流脈 (streak line): 空間のある一点を通過した要素が作る線で、煙突からの煙のように、ある固定した点からゆっくり染料や色素を注入するとき得られる線。
- タイムライン (time line): 流れを横切る線上から一斉に注入したトレーサーを時々刻々その位置を求める。

1.9　定常流と非定常流

流れの様子が時間とともに変化するかどうかで、定常流と非定常流がある。

- 定常流 (steady flow): 流れの様子が時間とともに変化しない。例えば、速度は場所だけの関数：$u = u(x, y)$。
- 非定常流 (unsteady flow): 空間の任意の場所で物理量が時々刻々変化する。例えば、速度は場所と時刻の関数：$u = u(x, y, t)$

第2章　流れを支配する方程式

流れを支配する方程式は基本的には、連続の方程式、運動方程式、エネルギー方程式である。流れの速度が速くなって、流れに圧縮性の効果が入ってくると、この他に、状態方程式や粘性係数を決める補助式が必要になる。ちなみに、マッハ数が 0.3 になると、密度変化が 5% 生じ、圧縮性が効き始める。

2.1　連続の方程式

連続体であるので、流れが途中で無くなったり、急に発生したりしない。考えている領域を満たしながら連続的に流れている。

流管の場合の連続の方程式は

$$\rho V A = 一定 \tag{2.1}$$

となる。ここで、ρ は密度、V は流管内の流体の速度、A は流管の断面積である。

ちなみに、連続体とみなすことができない流れを希薄流 (rarefied gas flow) と呼ぶ。これを支配するパラメータはクヌーセン数 ($Kn = \lambda/L$, λ は分子の平均自由行程、L は物体の基準長さである) である。また、希薄流を計算するにはボルツマン方程式を解くことになるが、DSMC(Direct Simulation Monte Carlo) 法により数値計算できる。

2.2　運動方程式

流れの運動方程式はニュートンの運動の第 2 法則、つまり、

$$質量 \times 加速度 = 力 \tag{2.2}$$

より得られる。

粘性を無視した場合にはオイラーの方程式と呼ばれる。1 次元流の場合の運動方程式は

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.3}$$

である。ここで、u は速度、p は圧力である。左辺の括弧の中の第 1 項は非定常項、第 2 項は対流項である。また、右辺第 1 項の ρX は重力、右辺第 2 項は圧力勾配項である。流体を流すためには、この圧力勾配項が必要であり、実際にはポンプやファンがその役目をしている。粘性流体では、右辺の圧力項の次に粘性項が加わる。

流れの方程式あるいは運動方程式は簡易なものから順に

- ポテンシャルの方程式：　渦度も粘性も考慮しない。

- オイラーの方程式：　渦度は考慮するが粘性は考慮しない (物体表面では流れはスリップする。つまり、流れは物体表面に沿う速度ベクトルをもつ)。
- ナビエ・ストークス方程式：　渦度も粘性も考慮する (物体表面では流れは粘着する。つまり、物体表面で、速度は 0 である)。

最近では、コンピュータを使って、編微分方程式であるナビエ・ストークス方程式を離散化し（これには、差分法、有限体積法、有限要素法などいくつかの方法がある)、数値的に解かれている。数値計算も大変な面があり、時間刻み δt をある程度小さくしないと (CFL 条件を満たすように) 発散する。そのため、非定常計算には多くの時間を要する。

2.3　エネルギー方程式

流体の持つエネルギーは、単位質量当り、

- 運動エネルギー：　$(1/2)V^2$
- 位置エネルギー：　gh (g は重力加速度、h は基準面からの高さ)
- 圧力エネルギー：　p/ρ
- 内部エネルギー：　e_i
  物質の内部に蓄えられる熱的エネルギーである。分子の運動が活発化するとそれにつれて温度が上昇する。また、分子間の距離が増大して (これは分子間距離に関する位置エネルギーの増大でもある)、気体は膨張する。

  非圧縮性流体は膨張しないので、この位置エネルギーは変化しない。

  $$de_i = C(T)dT \tag{2.4}$$

  ここで、C は比熱 (specific heat) で、温度を１度あげるのに必要な熱量で、通常温度の関数である。もし、比熱が一定であれば ($C =$ 一定)

  $$e_i = CT \tag{2.5}$$

  となる。
- エンタルピー：　内部エネルギと圧力エネルギの和である。

  $$h \equiv e_i + p/\rho \tag{2.6}$$

  もし、熱量的完全ガスであれば

  $$h = C_pT \tag{2.7}$$

2.3.1 静止している流体の持つエネルギー

熱力学の第一法則より

$$dQ = de_i + pdv = de_i + pd(1/\rho) \tag{2.8}$$

ここで、v は比容積で、密度の逆数である。

$$v = 1/\rho \tag{2.9}$$

この式の解釈は、外から加えられた熱量 dQ（左辺）は、内部エネルギーの増加 de_i(右辺第 1 項）と、膨張するときの外部への仕事 pdv(右辺第 2 項）に使われる。ちなみに、非圧縮性流体では膨張による仕事がないので $(dv = d(1/\rho) = 0)$ ので

$$dQ = de_i \tag{2.10}$$

となる。つまり、加えた熱量は温度上昇だけに使われる。

2.3.2 運動している流体の持つエネルギー

一般的に、流体は単位質量当り

$$E = \frac{1}{2}v^2 + e_i + \frac{p}{\rho} + gy \tag{2.11}$$

のエネルギ E を持っている。

ある流管に入口 (1) と出口 (2) があり、その途中で仕事 W がなされ、また、熱量 Q が加えられると、入口と出口でのエネルギの差は

$$E_2 - E_1 = Q + W \tag{2.12}$$

となる。

2.4 ベルヌーイの方程式

密度が変化する流れに対する一般化されたベルヌーイの方程式は

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega = \text{一定} \tag{2.13}$$

である。ここで、Ω は体積力のポテンシャルで、体積力 $\vec{X}$ との関係は

$$\vec{X} = -grad\ \Omega \tag{2.14}$$

である。ちなみに、ポテンシャルとは、それを微分すると欲しい量が得られるものである。また、ここでは、ρ は圧力 p だけの関数である場合を考えており、このような流体をバロトロピック流体 (barotropic fluid) と呼ぶ。

$$\rho = \rho(p) \tag{2.15}$$

一般化されたベルヌーイの式は、密度が一定の場合には以下のように簡略化される。

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega = \text{一定} \tag{2.16}$$

右辺の一定値は流線毎に違う値を取って良い。また、鉛直方向 (y 方向) に重力が働く場合には $\Omega = gy$ となるので

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gy = const \tag{2.17}$$

である。

この式の意味は、流体の運動エネルギー、圧力エネルギー、重力のポテンシャルエネルギーの和は一定であるということである。つまり、例えば、圧力が上がれば速度は減少する可能性がある。また、高さ y 増加しても、速度が V が減少する可能性がある。

2.5　非圧縮性流の場合のエネルギー関係式

流れのエネルギーには、機械的エネルギーと熱的エネルギーがある。非圧縮性流体の場合、外から加えた熱エネルギーは

$$\begin{aligned} Q &= E_2 - E_1 && (2.18)\\ &= \left(\frac{1}{2}V^2 + e_i + \frac{p}{\rho} + \Omega\right)_2 - \left(\frac{1}{2}V^2 + e_i + \frac{p}{\rho} + \Omega\right)_1 && (2.19)\\ &= e_{i2} - e_{i1} + \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega\right)_2 - \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega\right)_1 && (2.20) \end{aligned}$$

ここで、非圧縮性流でのベルヌーイの関係式

$$\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega\right)_2 = \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + \Omega\right)_1 = \text{一定} \tag{2.21}$$

を使うと、

$$Q = e_{i2} - e_{i1} = C(T_2 - T_1) \tag{2.22}$$

となる。ここでは、比熱 C が一定の熱量的完全ガスの場合を考えている。この式から、非圧縮性流体の場合には、外から加えられる熱エネルギーは、内部エネルギーの増加のみに使われる。このことは先に述べられている。

このように、非圧縮性流体の場合には、機械的エネルギーが得られる大本の式である運動方程式と、熱的エネルギーを計算するためのエネルギー方程式を別々に解けばよいことになる。つまり、分離して考えて良い。先ず、運動方程式を解いて速度場 $\vec{v}(x,y,z)$ を求め、その後で、それを使って温度場 $T(x,y,z)$ を求めることになる。流体の温度は、外から加えられた熱エネルギーのみにより決まり、圧縮性流体のように圧力や速度の増減により変化しない。

2.6　熱力学の第 2 法則

熱力学の第 2 法則にはいくつかの記述の仕方がある。

- 熱はそれ自身低温物体から高温度の物体へは移ることができない。
- 自然状態において、熱が高温物体から低温物体へ移動するときは、系のエントロピーを常に増加させる。
- 非可逆過程においては、常にエントロピーが増大する。例えば、熱伝導係数 k や粘性係数 μ が存在するときには常に非可逆過程である。

2.7 エントロピー

エントロピー (entropy) はクラウジウス (Clausius) によって命名されたものである。統計力学的な意味はボルツマン (Boltzmann) により以下のように与えられた。

$$S = k \cdot \ln W \tag{2.23}$$

ここで、k はボルツマン定数、W は微視的状態の数である。

熱力学の第 1 法則より

$$dQ = C_v dT + pd(1/\rho) = C_p dT - (1/\rho)dp \tag{2.24}$$

ここで、C_p は等圧比熱、C_v は等容比熱である。ちなみに、C_p と C_v の間には

$$C_p - C_v = R \tag{2.25}$$

の関係がある (Meyer の式)。

dQ の式を温度 T で割ると

$$\frac{dQ}{T} = C_v \frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho} = C_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p} \tag{2.26}$$

この式は、全体が全微分の形になっているので、ここで、以下の量を導入する。

$$dS \equiv \frac{dQ}{T} \tag{2.27}$$

ここで、S は単位質量当りのエントロピーで、状態量である。結局、

$$dS = C_v \frac{dp}{p} - C_p \frac{d\rho}{\rho} \tag{2.28}$$

となる。これを積分すると

$$S - S_0 = C_v \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = C_p \ln \frac{T}{p^{(\gamma-1)/\gamma}} = C_v \ln \frac{p}{\rho^{\gamma}} \tag{2.29}$$

となる。ここで、S_0 は積分定数である。

ρ_1, p_1 ,T_1 のとき $S = S_1$ の値をとるものを基準量とすれば、任意の状態では以下の関係が得られる。

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \frac{p_1}{\rho_1^{\gamma}} e^{(S-S_1)/C_v} \tag{2.30}$$

$$\frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \frac{T_1}{\rho_1^{\gamma-1}} e^{(S-S_1)/C_v} \tag{2.31}$$

$$\frac{T}{p^{(\gamma-1)/\gamma}} = \frac{T_1}{p_1^{(\gamma-1)/\gamma}} e^{(S-S_1)/C_p} \tag{2.32}$$

第3章　定常1次元流

ここでは、簡単のために、1 次元流について述べる。管内流れにおいて、管軸に沿う方向の変化に比べて、断面積内での変化が小さいと仮定する。

3.1　基礎方程式

- 状態方程式:　理想気体 (ideal gas) の方程式

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{3.1}$$

- 連続の方程式：　質量流量が一定

$$\rho u A = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 = \text{一定} \tag{3.2}$$

  これを微分形で表すと

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dx} = 0 \tag{3.3}$$

  単位時間、単位面積当りを通過する質量流量を流量密度 (mass flow density)、あるいは質量流束 (mass flux) と呼ぶ。

- 運動方程式：

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\cos\theta \tag{3.4}$$

  ここで、g は重力加速度である。定常流であれば

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\cos\theta \tag{3.5}$$

- 運動量方程式：運動量の差は、その方向に作用した力積に等しいという関係から、

$$F = I_2 - I_1 = (\rho_2 u_2^2 + p_2)A_2 - (\rho_1 u_1^2 + p_1)A_1 \tag{3.6}$$

  ここで、I は衝動関数 (impulse function) で

$$I \equiv (\rho u^2 + p)A \tag{3.7}$$

  である。
  参考：　ロケットが真空中を飛んでいるときの推力 (thrust force) は

$$\vec{F} = -\dot{m}\vec{v} - p_e A_e \vec{n} \tag{3.8}$$

となる。ここで、p_e はロケットノズル出口での圧力、A_e はロケットノズル出口の断面積である。また、$\dot{m}$ は質量流量である。これを1次元流として考えると、

$$(\vec{v})_x = u_e, \quad \dot{m} = \rho_e u_e A_e \tag{3.9}$$

となり、また、ロケットでは、入ってくる量がないので、$I_1 = 0$ となり、その結果、推力 F は

$$F = A_e(p_e + \rho_e u_e^2) \tag{3.10}$$

完全ガスでは、音速 c は

$$c^2 = \gamma RT = \gamma \frac{p}{\rho} \tag{3.11}$$

となるので、

$$F = A_e p_e \left(1 + \frac{\rho_e u_e^2}{p_e}\right) = A_e p_e (1 + \gamma M_e^2) \tag{3.12}$$

等エントロピー流であると仮定すると

$$F = A_e p_0 (1 + \gamma M_e^2) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \tag{3.13}$$

ここで、ノズル出口でのマッハ数 M_e は、$A_e/A_t = A_e/A_*$ より求められる（$A_t = A_*$ はスロートの断面積である）。

- エネルギー方程式：

$$E_2 - E_1 = \delta Q + \delta W \tag{3.14}$$

ここで、E は以下のように定義される。

$$E = \frac{1}{2}u^2 + h + gy \tag{3.15}$$

管の途中で熱エネルギーや仕事が加わらないとすると

$$\frac{1}{2}u^2 + h + gy = \text{一定} \tag{3.16}$$

となる。この式の中にはエンタルピー h が入っているので、非圧縮性流でのベルヌーイの式とは異なる。

ここで、重力加速度 g が他の量に比べて無視できる場合を考える。

$$\frac{1}{2}u^2 + h = \text{一定} \tag{3.17}$$

貯気槽からパイプ等により気体を導くときには、この式を使って

$$\frac{1}{2}u^2 + C_p T = C_p T_0 \tag{3.18}$$

ここで、T_0 は貯気槽での温度である。つまり、そこでは速度が0である。これを使うと、温度 T での速度は

$$u = \sqrt{2C_p(T_0 - T)} \tag{3.19}$$

となる。$T=0$ まで気体を膨張させると、得られる最大速度 u_{max} は

$$u_{max}=\sqrt{2C_pT_0} \tag{3.20}$$

となる。つまり、最大の速度は、貯気槽の温度 T_0 により決まり、最大速度をさらに増加させるためには貯気槽の気体を温めれば良い。

第4章　ポテンシャル流

渦度のない流れをポテンシャル流と呼ぶ。渦度の定義は

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \tag{4.1}$$

ここで、

$$\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z) \tag{4.2}$$

である。従って、ポテンシャル流では

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = 0 \tag{4.3}$$

を満たすので、これより、速度ポテンシャル ϕ が定義される。

$$\vec{u} = grad\phi = \nabla \times \phi \tag{4.4}$$

この式を連続の式

$$div\,\vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{4.5}$$

に代入すると、速度ポテンシャルの満たす方程式

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0 \tag{4.6}$$

が得られる。これはラプラスの方程式である。また、この方程式は楕円型であるので、解くときには 4 隅の境界条件が必要になる。

4.1　吹き出し流れ

　ある点から泉のように四方八方に吹き出すものを吹き出しと呼ぶ。逆に、吸い込むものを吸い込みと呼ぶ。3 次元流における吹出しの速度ポテンシャル ϕ は

$$\phi = -\frac{\sigma}{4\pi r} \tag{4.7}$$

ここで、σ は吹出しの強さである。$\sigma > 0$ のときは吹出しで、$\sigma < 0$ のときは吸い込みとなる。半径方向の速度成分 v_r は

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\sigma}{4\pi r^2} \tag{4.8}$$

吹出しや吸い込みは半径方向速度成分のみを持ち、ある点から放射状で、かつ、等方的である。

4.2　渦の特性

台風や竜巻など渦は我々の周りに日常的に見られる。たとえば、秋に枯葉が落ちている道路を見ると、風が吹いたときに渦巻く様子が可視化される場合がある。渦にはいくつかの大事な特性がある。

4.2.1　循環

循環 (circulation)Γ とは、流体中の閉曲線に沿って速度の接線成分を積分したものである。

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} \tag{4.9}$$

飛行機の翼などの物体周りに計算したこの循環が 0 でないとき、揚力 L が発生する。

$$L = \rho U_\infty \Gamma \tag{4.10}$$

ここで、U_∞ は一様流の速度あるいは物体の飛行速度である。また、ストークス (Stokes) の定理より、循環はその面内にある渦度の面積分で表される。

$$\Gamma = \iint \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \tag{4.11}$$

ここで、$d\vec{S}$ は、面積要素ベクトルで、

$$d\vec{S} = \vec{n} dS \tag{4.12}$$

である。$\vec{n}$ は面積要素に垂直な単位ベクトルである。

4.2.2　トムソンの循環定理

これは、トムソン (Thomson) あるいはケルビン (Kelvin) の定理として知られている（ちなみに、Thompson も Kelvin も同じ人である）。この定理の内容は、流体の粒子とともに移動する閉曲線に沿って計算した循環の値は時間とともに変化しないということである。

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \tag{4.13}$$

ここで、D/Dt は実質微分あるいは Lagrange 微分で、Euler 表示を採用したために出てきた微分である。

4.2.3　ヘルムホルツの渦定理

ヘルムホルツの渦定理は
”渦の強さ $\Gamma = \int \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ は、渦管のどの断面でも同じとなり、時間的に変化しない。”

4.2.4　ビオ・サバールの定理

渦が存在すると、その周りに速度が誘起される。この誘起される速度は、ビオ・サバール (Biot-Savart) の定理から計算される。渦糸の強さ Γ が存在するとき、空間中の点 P に誘起される速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v}(x,y,z) = \int \frac{1}{4\pi}\frac{\Gamma d\vec{s}_1 \times \vec{r}}{r^3} \tag{4.14}$$

と表される。ここで、$d\vec{s}_1$ は渦糸に沿う微小要素の長さベクトルであり、$\vec{r}$ はこの微小長さ要素から点 $P(x,y,z)$ までの長さベクトルである。

4.3　複素速度ポテンシャル

2 次元流れを解析するときに複素関数を用いると便利である。このとき、複素速度ポテンシャル $W(z)$ は

$$W(z) = \phi + i\psi \tag{4.15}$$

と定義される。ここで、i は虚数単位で、また、z は複素平面で、$z = x + iy$ である。これを使うと (x,y) 方向の速度成分 (u,v) は

$$\frac{dW}{dz} = u - iv \tag{4.16}$$

と、共役複素速度の形で表される。

この複素速度ポテンシャルにより、いくつかの基本的な流れが簡単な式で表される。

- 一様流：
$$W = U_\infty z \tag{4.17}$$

- 吹出し流れ：
$$W = \frac{m}{2\pi}\ln z \tag{4.18}$$
ここで、m は吹出しの強さである（$m > 0$ のとき吹出し、$m < 0$ のとき吸い込み)。

- 渦：
$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z \tag{4.19}$$
ここで、Γ は渦の強さ、言い換えれば、循環である。

- 2 重吹き出し：
$$W = \frac{\mu}{\pi}\frac{1}{z} \tag{4.20}$$
ここで、μ は 2 重吹出しの強さである。ちなみに、2 重吹出しとは、吹出しと吸い込みを限りなく近づけ、その強さを無限大にしたものである。

4.3.1　円柱周りの流れ

円柱周りの流れは、基本的には、2 重吹出しにより計算される。これは、物体の外にいる人が見た場合の円柱周りの流れである。これに一様流を加えると、物体に乗って見た場合円柱周りの流れが得られる。

このことから、半径 a の円柱に一様流 U_∞ があたり (円柱に乗って見た場合）、かつ、円柱周りに循環 Γ がある場合は

$$W = U_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{a} \tag{4.21}$$

となる。この円を写像関数 (例えば、ジューコフスキ変換）で種々の形状に変換すると、それらの物体周りのポテンシャル流れが得られる。

第5章　等エントロピー流

ここでは、高速流の解析に良く用いられる等エントロピー流 (isentropic flow) の関係式について述べる。等エントロピ流は、断熱の条件から導かれる。ただし、断熱流 (adiabatic flow) とまったく同じではない場合があるので注意を要する。断熱流であってもエントロピーは増加する場合がある。

エントロピー S は管軸に沿って変化しないとすれば、

$$\frac{dS}{dx} = 0 \quad \to \quad S = \text{一定} \tag{5.1}$$

従って、等エントロピー条件より、管軸 x に沿う、$x = x$, $x = x_1$, $x = x_0$ において

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \text{一定} \tag{5.2}$$

となる。ここで、$x = x_0$ は貯気槽の位置を表す。

また、エンタルピー h は

$$h = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} \tag{5.3}$$

となる。ちなみに、

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R, \quad C_v = \frac{1}{\gamma - 1} R \tag{5.4}$$

である。

これを使うとエネルギー式は

$$H_0 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0} \tag{5.5}$$

ここで、H_0 は全エンタルピーで、運動エネルギーとエンタルピの和である。

$$H_0 = \frac{1}{2}u^2 + h \tag{5.6}$$

これらの関係を使って、2 つの断面 ($x = x$ と $x = x_1$) での諸量の比が求められる。

- 速度の比 u/u_1 は

$$\left(\frac{u}{u_1}\right)^2 = 1 - \frac{2}{\gamma - 1}\frac{1}{M_1^2}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma - 1} - 1\right] \tag{5.7}$$

つまり、速度比 u/u_1 が $x = x_1$ でのマッハ数 M_1 と、密度比 ρ/ρ_1 で表される。

- 管の断面積比 A_1/A は

$$\frac{A_1}{A} = \frac{u}{u_1}\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2-\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\left(\frac{u}{u_1}\right)^2\right]^{1/(\gamma-1)} \tag{5.8}$$

- 密度比 ρ/ρ_1 は

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2-\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\left(\frac{u}{u_1}\right)^2\right]^{1/(\gamma-1)} \tag{5.9}$$

- 圧力比 p/p_1 は

$$\frac{p}{p_1} = \left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2-\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\left(\frac{u}{u_1}\right)^2\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{5.10}$$

- 温度比 T/T_1 は

$$\frac{T}{T_1} = 1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2-\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\left(\frac{u}{u_1}\right)^2 \tag{5.11}$$

- 音速の比 c/c_1 は

$$\frac{c}{c_1} = \left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2-\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\left(\frac{u}{u_1}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.12}$$

- マッハ数の比 M/M_1 は

$$\frac{M}{M_1} = \frac{u}{u_1}\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2-\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\left(\frac{u}{u_1}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{5.13}$$

これらは、基準面 $x=x_1$ での値を使って、任意の場所 $x=x$ での値を求めている。従って、汎用性としてはあいまいで不適当である。基準として、もっとしっかりした値を取る必要がある。そこで考えられる基準値は以下の 3 つである。

- 静止の状態：　貯気槽　$(u_1=0)$
- 音速の状態：　流速が音速になったとき　$(u_1=c)$
- 真空状態：　圧力 0 まで膨張　$(u_1=u_{max}=\sqrt{2C_pT_0})$

5.1　音速を基準量とした場合

断面積のことを考えると、つまり、貯気槽状態や真空状態では断面積が無限大になってしまうので、基準量として最適なものは、上述の 2 番目の音速の状態である。速度が音速になるときの状態量を*印を付けて表すと

$$u_1 = u_* = c_* \tag{5.14}$$

$$M_1 = M_* = u_*/c_* = c_*/c_* = 1 \tag{5.15}$$

となる。

また、1 次元管内流の連続の式は

$$\frac{\rho u}{\rho_* u_*} = \frac{A_*}{A} \tag{5.16}$$

と変形される。ここで、A_* は流れが音速になるときの管の断面（これをスロートと呼ぶ）での断面積である。この式を利用することにより、以下の諸量の比が得られる。

- 面積比 A_*/A は

$$\frac{A_*}{A} = \frac{u}{u_*}\left[\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{u}{u_*}\right)^2\right]^{1/(\gamma-1)} \tag{5.17}$$

- 密度比 ρ/ρ_* は

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left[\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{u}{u_*}\right)^2\right]^{1/(\gamma-1)} \tag{5.18}$$

- 圧力比 p/p_* は

$$\frac{p}{p_*} = \left[\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{u}{u_*}\right)^2\right]^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{5.19}$$

- 温度比 T/T_* は

$$\frac{T}{T_*} = \frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{u}{u_*}\right)^2 \tag{5.20}$$

- マッハ数の比 M は

$$M = \frac{u}{c_*}\left[\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{u}{c_*}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{5.21}$$

このマッハ数の式から、逆に、u/c^* が得られる。

$$\frac{u}{c^*} = M\left[\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}M^2\right]^{-1/2} \tag{5.22}$$

これを今までの式に代入すると、各量の音速での量との比が得られる。

$$\frac{A_*}{A} = M\left[\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}M^2\right]^{-(1/2)(\gamma+1)(\gamma-1)} \tag{5.23}$$

$$\frac{T}{T_*} = \frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \tag{5.24}$$

$$\frac{p}{p_*} = \left[\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}M^2\right]^{-\gamma/(\gamma-1)} \tag{5.25}$$

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left[\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}M^2\right]^{-1/(\gamma-1)} \tag{5.26}$$

つまり、任意の場所での量とスロートでの量との比が、任意の場所でのマッハ数で表される。

5.2　基準量を貯気槽に取る場合

高圧貯気槽から噴出したり、大気中の空気を真空槽に吸い込む場合は、基準状態を静止状態に取った方が便利である。上と同様な方法を用いて、以下の関係式が得られる。

- 密度比 ρ/ρ_0 は

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right]^{-1/(\gamma-1)} \tag{5.27}$$

- 圧力比 p/p_0 は

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right]^{-\gamma/(\gamma-1)} \tag{5.28}$$

- 温度比 T/T_0 は

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right]^{-1} \tag{5.29}$$

- 速度比 u/c_0 は

$$\frac{u}{c_0} = M\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right]^{-1} \tag{5.30}$$

ここで、p_0, ρ_0, T_0, c_0 は貯気槽での値である。

各量のスロートでの量と貯気槽との比は

$$\frac{p_*}{p_0} = \left[\frac{\gamma+1}{2}\right]^{-\gamma/(\gamma-1)} \tag{5.31}$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_*} = \left[\frac{\gamma+1}{2}\right]^{-1/(\gamma-1)} \tag{5.32}$$

$$\frac{T_*}{T_0} = \left[\frac{\gamma+1}{2}\right]^{-1} \tag{5.33}$$

$$\frac{u_*}{c_0} = \frac{c_*}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \tag{5.34}$$

(5.35)

上述の関係式を誘導するとき、以下の静止状態、音速状態、真空状態での間のエネルギー関係式が使われる。

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{1}{\gamma-1}c_0^2 = \frac{\gamma}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p_*}{\rho_*} = \frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_*^2 = \frac{1}{2}u_{max}^2 \tag{5.36}$$

ちなみに、この式から最大速度と貯気槽での音速との比が

$$\frac{u_{max}}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \tag{5.37}$$

が得られる。

各量のスロートと淀み状態での値の比は、比熱比 γ に依存する。その値を表にすると

	2 原子分子 ($\gamma = 7/5$)	単原子分子 ($\gamma = 5/3$)
T_*/T_0	0.8333	0.7500
ρ_*/ρ_0	0.6339	0.6495
p_*/p_0	0.5283	0.4871

アルゴン Ar、ヘリウム He などは単原子分子であり、水素 H_2、酸素 O^2、窒素 N_2 は 2 原子分子である。ちなみに、比熱比 γ は自由度 f から計算される。

$$\gamma = \frac{f+2}{f} \tag{5.38}$$

ここで、f は自由度で、並進運動の場合、x, y, z の 3 つの方向があるので $f = 3$ である。つまり、単原子は自由度が $f = 3$ であり、2 原子分子は $f = 5$ である。

第6章　衝撃波

衝撃波は高速流の特徴で、流れが超音速になったときに生じる。衝撃波は通常の状態では非常に薄い（逆に、大気圏の上空や、ミクロの世界で流体が希薄の状態では相対的に厚くなる)。通常の空気では $10^{-5}cm$ のオーダーである。衝撃波を過ぎると諸量が急激に変化する。ただし、衝撃波の中 (非常に薄い層）ではこれらの量は連続的に変化する。そこでは、粘性や熱伝導性が大事な役割を果たす（これは分子気体力学の世界である)。衝撃波は通常、非常に薄いのでマクロに見たとき（連続体としてみたとき）には不連続面として扱って良い。

外部からの作用が存在しないので、衝撃波を横切って、質量、運動量、エネルギーは保存される。

- 連続の式：　$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$
- 運動量の式：　$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2$
- エネルギの式：　$\frac{1}{2}u_1^2 + h_1 = \frac{1}{2}u_2^2 + h_2$

ここで、$()_1$ は衝撃波の前の値、$()_2$ は衝撃波の後の値である。その他に、

- 状態方程式：　理想気体 $(p/\rho = RT)$
- 熱力学の第 2 法則：　エントロピは衝撃波を横切って必ず増加する $(dS \geq 0)$

6.1　総温の変化

総温とは、運動している流体を仮想的にかつ断熱的にその速度を 0 にしたとき得られる温度である。断熱状態で総温 T_0 は衝撃波を横切って変化しない。つまり、同じである。従って、総温の関係する以下の各量は同じになる。

$$H_{01} = H_{02} \tag{6.1}$$

$$T_{01} = T_{02} \tag{6.2}$$

$$c_{01} = c_{02} \tag{6.3}$$

$$T_{*1} = T_{*2} \tag{6.4}$$

$$c_{*1} = c_{*2} \tag{6.5}$$

連続、運動量、エネルギの各式から速度 u_1 および u_2 を消去すると、ランキン・ユゴニオ (Rankine-Hugoniot) の関係式が得られる。

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2} = \frac{(\gamma+1)(\rho_2/\rho_1) - (\gamma-1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)(\rho_2/\rho_1)} \tag{6.6}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)p_2-(\gamma-1)p_1}{(\gamma+1)p_1-(\gamma-1)p_2} = \frac{(\gamma+1)(p_2/p_1)-(\gamma-1)}{(\gamma+1)-(\gamma-1)(p_2/p_1)} \tag{6.7}$$

6.2 総圧の変化

総圧とは流れている流体の要素を局所的に断熱状態でその速度を 0 にしたとき得られであろう圧力である。衝撃波を横切って総圧 p_0 は減少する。

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \tag{6.8}$$

ちなみに、p_{02} は通常ピトー圧と呼ばれる。念のために、もう一度述べると、総温は衝撃波を横切って変化しないが、総圧は変化する。

6.3 エントロピーの変化

衝撃波を横切って、エントロピーは増大する。

$$\frac{S_2-S_1}{C_v} = \ln\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)+\gamma\ln\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_1^2+\frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{M_1^2}\right) \tag{6.9}$$

この式から以下の事が言える。

- $M_1>1$ のとき、$(S_2-S_1)/C_v$ が正となる。つまり、エントロピは増大する。
- $M_1<1$ のとき、$(S_2-S_1)/C_v$ が負となる。つまり、エントロピは減少する。

従って、衝撃波は、衝撃波の前の流れ (衝撃波に入ってくる流れ）が超音速のときにのみ発生する。逆の言い方をすれば、膨張衝撃波は存在しない。

6.4 温度、密度、速度の変化

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{M_1^2}\right) \tag{6.10}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_1^2+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{M_1^2}\right)^{-1} \tag{6.11}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_1^2+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{M_1^2} \tag{6.12}$$

ちなみに、上で述べた速度比の式の両辺に u_1^2 を掛けると

$$u_1u_2 = c_*^2 \tag{6.13}$$

となる。従って、

$$\frac{u_1}{c_*}\cdot\frac{u_2}{c_*} = 1 \tag{6.14}$$

これをプラントル (Prandtl) の関係式と呼ぶ。この式から以下の事が分かる。

- $u_1/c_* > 1$ であるので、$u_2/c_* < 1$ となる。

6.5 垂直衝撃波前後の諸量の値

垂直衝撃波を横切って諸量がどのように変化するかを代表的な量に対して以下の表に示す。

M_1	M_2	p_2/p_1	$\rho_2/\rho_1 = u_1/u_2$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2.0	0.5774	4.5	2.667	1.688	0.7209
3.0	0.4752	10.33	3.857	2.679	0.3283
4.0	0.4350	18.50	4.571	4.047	0.1388
5.0	0.4152	29.00	5.0	5.8	0.06172
6.0	0.4042	41.83	5.268	7.941	0.02965
7.0	0.3974	57.00	5.444	10.47	0.01535
8.0	0.3929	74.50	5.565	13.39	0.008488
9.0	0.3898	94.33	5.651	16.69	0.004964
10.0	0.3876	116.5	5.714	20.39	0.003045

ここで、M_1 は衝撃波前のマッハ数、M_2 は衝撃波後のマッハ数である。垂直衝撃波の場合、衝撃波の後ろでは流れは必ず亜音速になる。

6.6 弱い衝撃波の場合

衝撃波が弱い場合を考える。衝撃波の強さ σ は

$$\sigma = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) \tag{6.15}$$

で表される。この式から、入射マッハ数 M_1 が 1 に近づくと、σ は小さくなる (0 に近づく) のが分かる。この σ を使って、衝撃波前後での各量の比を求めると

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \sigma \tag{6.16}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)(1+\sigma) + (\gamma-1)}{(\gamma-1)(1+\sigma) + (\gamma+1)} \tag{6.17}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \ln\left\{(1+\sigma)^{1/(\gamma-1)} \left[\frac{2\gamma + (\gamma-1)\sigma}{2\gamma + (\gamma+1)\sigma}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}\right\} \tag{6.18}$$

となる。弱い衝撃波の場合には、エントロピーの変化は上式をテーラー展開して

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{\gamma+1}{12\gamma^2}\sigma^3 - \frac{\gamma+1}{8\gamma^2}\sigma^4 \tag{6.19}$$

となる。つまり、エントロピーの変化は圧力差の 3 乗に比例することになる。この事から、音速流付近の弱い衝撃波では、エントロピーの増加を無視できる。つまり、遷音速流では渦なし流れと近似でき、ポテンシャル流れでの計算も可能となる。

6.7　斜め衝撃波の場合

　衝撃波は実際には垂直衝撃波のみならず、斜め衝撃波も生じる。この場合、基本的には衝撃波に垂直な成分は前述した垂直衝撃波の関係式が適用され、衝撃波に添う方向には、例えば、速度成分は、衝撃波の前後で同じ値を取る。

　斜め衝撃波に入ってくる流れのマッハ数を M_1、衝撃波の傾き角度を β、衝撃波を過ぎた後の流れの偏向角を θ とすると、

$$\tan\theta = \frac{2\cot\beta(M_1^2\sin^2\beta - 1)}{M_1^2(\gamma + \cot 2\beta) + 1} \tag{6.20}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2\sin^2\beta - 1) \tag{6.21}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\beta}{(\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta + 2} \tag{6.22}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2\sin^2\beta - 1)\right]\frac{(\gamma-1)M_1^2\sin^2\beta + 2}{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\beta} \tag{6.23}$$

$$\frac{u_2}{V_1} = 1 - \frac{2(M_1^2\sin^2\beta - 1)}{(\gamma+1)M_1^2} \tag{6.24}$$

$$\frac{v_2}{V_1} = \frac{2(M_1^2\sin^2\beta - 1)\cot\beta}{(\gamma+1)M_1^2} \tag{6.25}$$

斜め衝撃波の場合、衝撃波の後ろでは、超音速流になる場合も出てくる。